

# Tarnowskie Colloquia Naukowe

## *Tarnow Scientific Colloquia*

Czasopismo Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej w Tarnowie

Numer 4 (3/2017)

A photograph of a person's face, likely a woman, with numerous white EEG electrodes attached to the skin. The face is partially obscured by a large, semi-transparent grey rectangular area. A colorful heatmap is overlaid on the mouth area, showing a concentration of activity in red and yellow, surrounded by green and blue. The background is dark blue.

**NAUKI TECHNICZNE I ŚCISŁE**  
**TECHNICAL AND EXACT SCIENCES**



Tarnowskie Colloquia Naukowe



# **Tarnowskie Colloquia Naukowe**

## ***Tarnow Scientific Colloquia***

Czasopismo Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej w Tarnowie

**Numer 4 (3/2017)**

**NAUKI TECHNICZNE I ŚCISŁE**  
***TECHNICAL AND EXACT SCIENCES***

## **RADA NAUKOWA**

Krzysztof Firlej (Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Tarnowie), Adam Juskiewicz (Uniwersytet Jagielloński w Krakowie, Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Tarnowie), Jadwiga Laska (Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Tarnowie, Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie), Eligiusz Madejski (Akademia Wychowania Fizycznego im. Bronisława Czecha w Krakowie, Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Tarnowie), Michał Nawrocki (Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Tarnowie), Marcin Surzycki (Akademia Sztuk Pięknych im. Jana Matejki w Krakowie, Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Tarnowie)

## **KOLEGIUM REDAKCYJNE**

Sebastian Bielecki (redaktor tematyczny)  
Rafał Kurczab (redaktor tematyczny)  
Eliza Krzyńska-Nawrocka (sekretarz redakcji)  
Michał Nawrocki (redaktor naczelny)

## **ADRES REDAKCJI**

Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Tarnowie  
33-100 Tarnów, ul. Mickiewicza 8  
e-mail: [tcn@pwsztar.edu.pl](mailto:tcn@pwsztar.edu.pl)

### **Projekt okładki: \_mnekn\_**

Na okładce wykorzystano materiały z artykułu Daniela Króla i Anity Lorenc pt. *Acoustic Field Distribution in Speech with the use of Microphone Array*.

## **ISSN 2451-2990**

© Copyright by PWSZ w Tarnowie & Autorzy

Wersja papierowa jest wersją pierwotną czasopisma.  
Publikacja ukazała się nakładem Państwowej Wyższej Szkoły Zawodowej w Tarnowie.

Skład, druk i oprawa  
S-CAN Wydawnictwo s.c.

# Spis treści

<i>Tarnowskie Colloquia Naukowe. Uwagi wstępne</i> .....	7
<b>Daniel Król, Anita Lorenc</b> Acoustic Field Distribution in Speech with the use of the Microphone Array .....	9
<b>Robert Wielgat, Daniel Król, Tomasz Potempa, Paweł Koziol, Agnieszka Lisowska-Lis</b> Towards the Automatic Acoustical Avian Monitoring System .....	17
<b>Paulina Bednarz</b> Fabrication, properties and cytotoxicity evaluation of degradable poly(trimethylene carbonate-co-lactide) for the use as nerve guidance channels .....	39
<b>Jerzy Szczepański</b> Mathematical contests as seen by participants .....	49
<b>Edward Tutaj</b> Pewna uwaga o geometrii wykresu funkcji zliczającej liczby pierwsze <i>A certain note about the geometry of the prime counting function graph</i> .....	55
<b>Wojciech Pietruś, Rafał Kurczab, Dariusz Latowski</b> Oddziaływanie dihydroksyacetonu (DHA) zawartego w samoopalaczach z ludzką skórą – badania spektroskopowe i teoretyczne <i>The influence of dihydroxyacetone (DHA) contained in the self-tanning lotions with human skin – spectroscopic and theoretical studies</i> .....	79
<b>Tomasz Kołacz, Marcin Piekieniak, Jerzy Skwarczyński</b> Wpływ odchyleń napięcia sieci energetycznej na sprawność silników indukcyjnych .....	91
<b>Adam Pieprzycki, Wiesław Ludwin</b> Zastosowanie algorytmów rojowych w zadaniu planowania sieci WLAN <i>Application of rogue algorithms in the WLAN planning task</i> .....	99

**Małgorzata Martowicz, Magdalena Kosiba**

Analiza fizykochemiczna kwiatów i owoców tarniny

– krzewu, od którego pochodzi nazwa miasta Tarnowa

*Physico-chemical analysis of flowers and sloes of blackthorn**– the shrub from which the name of the town of Tarnow originates* ..... 111**Krzysztof Kleszcz, Martyna Mika**

Oznaczanie ceru w kamieniach do zapalniczek metodą spektrofotometrii Uv-Vis

*Determination of cerium in ferrocerium lighter flint stone using**Uv-Vis spectrophotometry* ..... 125**Adam Janik**

Prawa limitacyjne Kornaia

*Kornai's Limitation Rules* ..... 129**Wiesław Juda**

Porównanie siły ściskającej zniszczenia

skorupek jaj kurzych uzyskanych z różnego rodzaju hodowli

*Comparison of destruction compressive**force of chicken eggshells obtained from different types of chicken farms* ..... 135



# *Tarnowskie Colloquia Naukowe*

## **Uwagi wstępne**

### **1.**

Sukces złożonego i wielowymiarowego przedsięwzięcia o nazwie „Tarnowskie Colloquia Naukowe” jest faktem niezaprzeczalnym, a pierwszy tom serii nauk technicznych i ścisłych jest tego faktu niezbitym dowodem.

### **2.**

Powstały w wyniku współpracy Instytutu Politechnicznego i Instytutu Matematyczno-Przyrodniczego tom inicjujący trzecią, obok nauk humanistycznych oraz nauk o zdrowiu i kulturze fizycznej, serię, potwierdza skalę, ale też nieprzypadkowy charakter tego przedsięwzięcia. Jednocześnie rozwiewa on wszelkie wątpliwości co do potencjału naukowego, determinacji i zdolności organizacyjnych kadry PWSZ w Tarnowie.

### **3.**

Ciężka praca wielu osób składa się na nasz sukces i lista jest długa. Nazwisko piszącego niniejsze słowa znajduje się na końcu tej listy, wszelako do jego przywilejów i obowiązków należy wskazanie tych, którzy zasługują na wyróżnienie szczególne. W tym przypadku są to bez wątpienia reprezentujący tarnowską kadrę PWSZ redaktorzy tematyczni tomu inicjującego serię nauk technicznych i ścisłych – dr inż. Sebastian Bielecki i dr Rafał Kurczab.

Michał Nawrocki  
*REDAKTOR NACZELNY*



# Acoustic Field Distribution in Speech with the use of the Microphone Array

Daniel Król <sup>a,\*</sup>, Anita Lorenc<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup>*State Higher Vocational School in Tarnow, ul. Mickiewicza 8, 33-100 Tarnów, Poland*

<sup>b</sup>*Maria Curie-Skłodowska University, ul. Sowińskiego 17, 20-040 Lublin, Poland*

<sup>c</sup>*University of Warsaw, ul. Krakowskie Przedmieście 26/28, 00-927 Warszawa, Poland*

\*Corresponding author: dankrol@gmail.com

---

## Abstract

This article presents a 16-channel microphone-array recorder/processor that allows for a simultaneous and non-invasive detection of oral, oronasal and nasal segments in speech. Such devices and methods have not been used in the research on the articulation of sounds in the world's languages. In this paper analysis of Polish nasalized vowel was presented. Adaptive beamforming method used for rendering three-dimensional acoustic fields of the recorded audio data has been shown.

**Key words:** microphone array, 3D acoustic field distribution, adaptive beam-forming, oral, oronasal and nasal articulations

---

## Introduction

There are a plenty of instrumental techniques dedicated to examine nasality in speech. You can get familiar with them not only from phonetics and phonology publications [1], but also those from engineering and technical fields as well as clinical ones [2].

R.A. Krakow and M.K. Huffman [1] divide techniques of assessing nasality in speech for three groups depending on: 1) the source of velopharyngeal movements, 2) their characteristics and 3) the effects of such movements.

The examination on assessment of the source of velopharyngeal movements refer to muscles engaged in the control of work of soft palate. One of techniques is electromyography (EMG), in which electrical activity connected to muscle cramps is measured [3].

The investigation of characteristics of velopharyngeal movements is made through techniques of illustrating and tracing the outlines. There are a few techniques of illustrating the area of cramp and throat among which are: fiberoptic endoscopy [4], where during the investigation an endoscope with a camera registering the dynamics of work of structures observed is introduced into nasal cavity, radiography (in the tradition of Polish phonetic studies the most important publications are those of H. Koneczna and W. Zawadowski [5] as well as B. Wierzchowska [6]); currently the technique of radiography is used in CAT scans [7], nuclear magnetic resonance (MRI) [8] and ultrasonography [9]. The outlines of speech organs are created thanks to extraction of dynamic data on the basis of localization of previously marked points. Thanks to use of velotraces device one can monitor in mechanical way and get

analog record of position of soft palate [10]. In the examination using X-ray microbeam [11] or electromagnetic articulography [12] special sensors are attached to the area of soft palate or tongue. Nasometer uses the technique of photodetection during the examination [13].

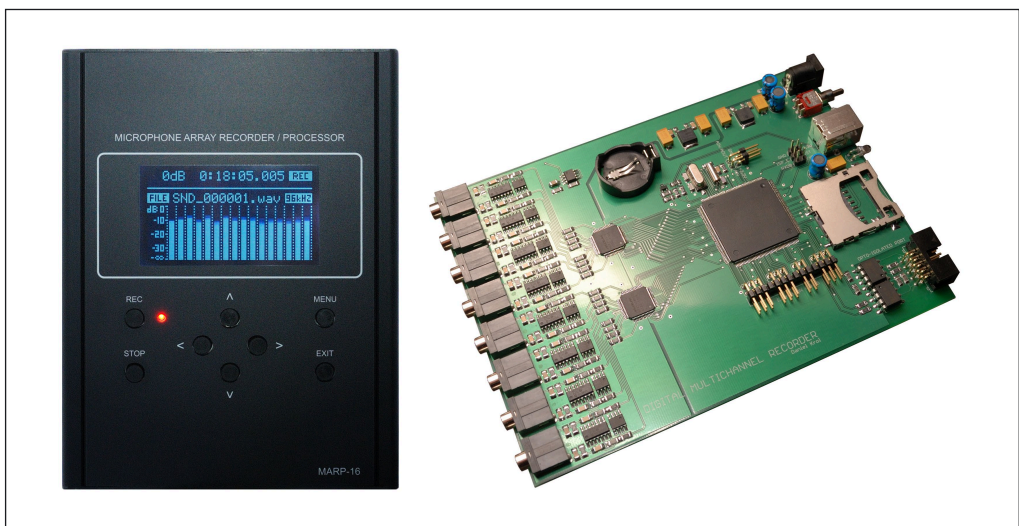
The last group of examination methods refers to the effects of velopharyngeal movements. They give aerodynamical effects as well as acoustic ones. Aerodynamical signals can be assessed thanks to masks that enable to estimate a medium value of the flow of air from the nose [14, 15]. Acoustic signals are registered via microphones. In TONAR-based [15] nasometers, acoustic signal is registered parallelly through two microphones – oral and nasal [17]. During examination there is a special hoop inserted on the head of speaker, which divides the oral and nasal canals. There are also two separate microphones attached to it. Currently the most modern way of registering acoustic signal and analysis of its spacial area during speaking is examination with microphone matrix using beamforming technique [18, 19]. In the contrary to above mentioned ways of examination, this one is uninvasive technique (e.g.

endoscopes, myography, nasometers, Rothenberg mask, ultrasonography), not using direct contact with examined organ – soft palate (e.g. EMA, Velotrace, myography), not requiring huge financial resources (see MRI, X-ray microbeam) and is based on natural position of examined person during speech (see MRI).

The article presents the possibilities of using the technique of adaptive beamforming in the examination and analysis of oral, oronasal and nasal articulation.

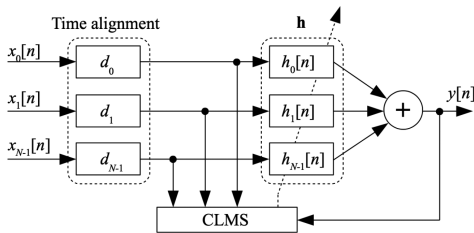
## Method

Analysis was carried out with the use of a 16-channel microphone-array recorder specially designed and built for the purposes of the experiment. An analysis of the spatial distribution of the acoustic fields in the recordings with the beamforming technique allowed for rendering three-dimensional acoustic fields in the articulation of the nasal vowels. The 16-channel circular microphone-array and recorder/processor (MARP-16) has been designed and built (Fig. 1).



**Figure 1.** Sixteen-channel microphone array recorder/processor MARP-16

In analog section was used low noise amplifiers and analog-to-digital converters with successive approximation register (SAR), dedicated to measuring equipment. The superiority of the SAR technique over the sigma-delta technology is presented in the literature [20, 21], [22]. The acquisition and pre-processing of the recorded audio data was realized by 32-bit floating point digital signal processor (DSP) with Cortex M4F core. After preprocessing stage the acquired audio data were stored on an SDHC/SDXC memory card in 16-channel WAV format. The multichannel recorder was controlled from the main computer by opto-isolated interface for minimize noise. Combining the 16-channel circular microphone array with the adaptive beamforming method used for rendering three-dimensional acoustic fields of the recorded audio data. Preliminary research results using fixed beamforming have been presented in [18, 19]. A basic problem of fixed beamforming is poor directivity factor in low frequency range and undesirable side lobes [24]. The novel rendering method using an adaptive beamforming based on LCMV (Linearly Constrained Minimum Variance) algorithm, proposed by Frost [23]. Figure 2 show a block diagram of the LCMV beamformer where the filter coefficients  $h_0$ - $h_{N-1}$  are adapted using a constrained version of the LMS algorithm (CLMS) [24].



**Figure 2.** Block diagram of LCMV algorithm with separate time alignment block

The LCMV algorithm minimizes the noise power at the output with a constraint on the filter response in look direction. Beampattern compar-

ing of fixed (delay-sum) and adaptive (LCMV) beamforming for a few selected frequencies have been shown in Figure 3. The geometry of microphone array were based on the size and shape of the Carsten's AG500 articulograph cube in which it was installed. The array was placed in the frontal wall of the cube, in front of the speaker's face (Fig. 4).

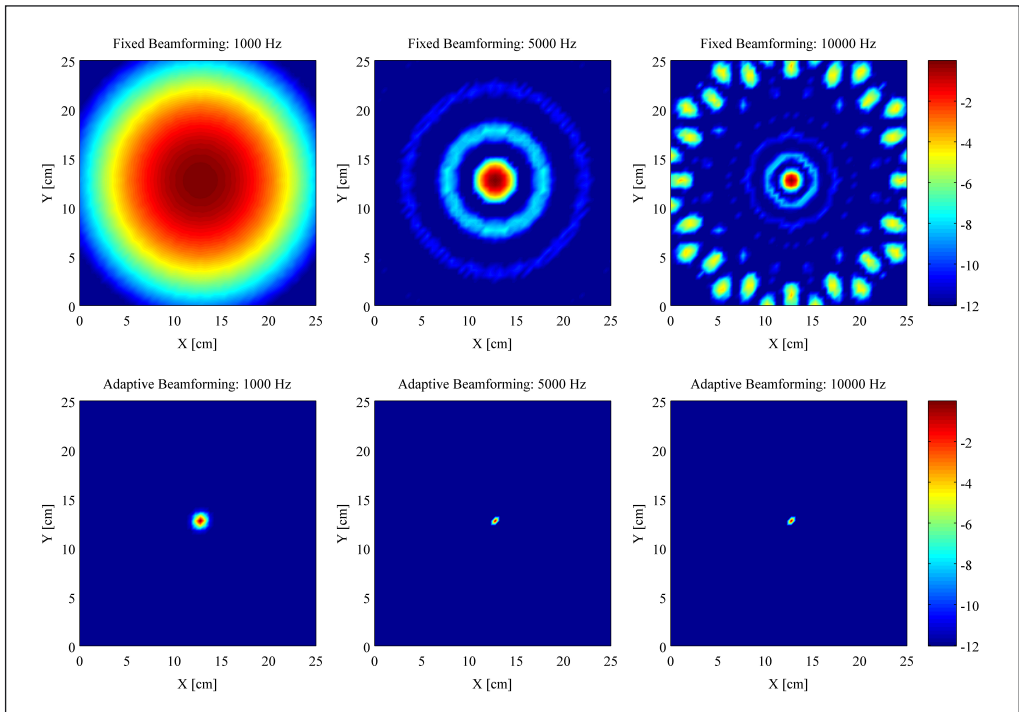
The circular microphone array scanned, with the use of the beamforming technique a  $250 \times 250$  mm square plain with the resolution of 5mm. In result, a matrix with dimension  $50 \times 50$  of the acoustic field distribution was obtained. The sampling frequency in the recorder connected to the microphone array was set to 96 kHz for increase the angular resolution of the beamsteering [25].

## Speakers

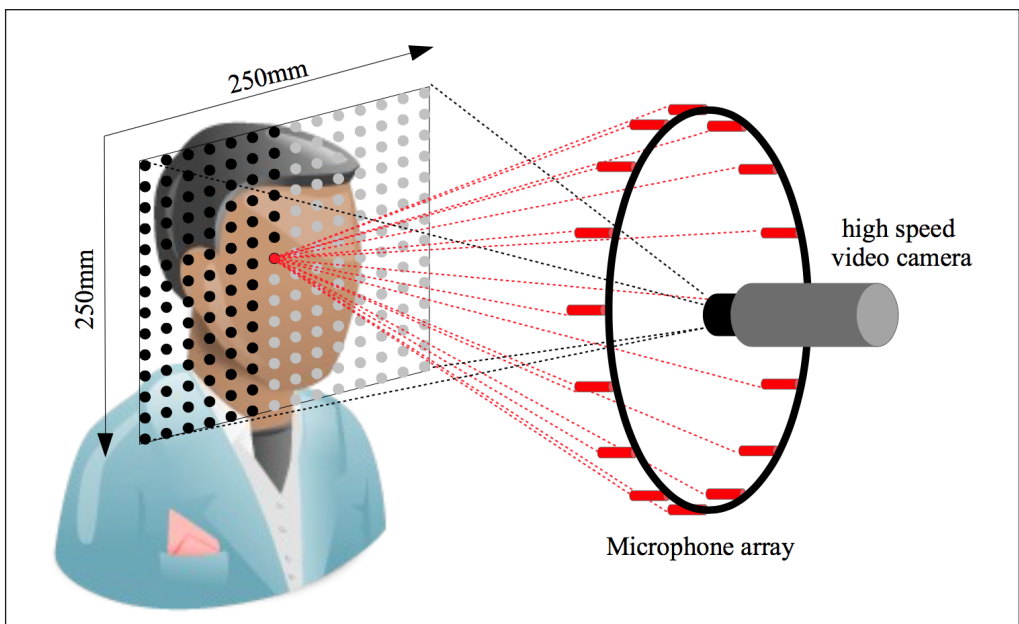
One of the major assumptions of the experiment was a precise selection of speakers, who, in the opinion of a team of experts, used the careful style of the standard variety of contemporary Polish. To this end, it was made an attempt to extract the relevant criteria in diagnosing normative speech (phonetic and orthophonic criteria as well as those deriving from the theory and practice of normative linguistics, it is also necessary to take into account biological criteria: anatomical, functional and perceptual) [26]. The selection of the participants was therefore special: in accordance with established specific normative criteria mentioned above, 20 adult speakers of Polish (10 women and 10 men) were chosen out of a pre-selected group of 200 candidates.

## Speech material

The realisation of variants of basic vowels of Polish language were examined in word-medial position, in the syllable of two-syllable words with accent – always in the same context. Assessed vowels were foregone with unvoiced plosive consonant [p]. Due to the possibility of realisation of Polish nasalized vowels [ɔ̃] and [ɛ̃], a voiceless fricative conso-



**Figure 3.** Beam pattern comparison of fixed and adaptive beamforming



**Figure 4.** Scanning of the acoustic field distribution (50×50 points) by the circular microphone array

nant [s] was a context proceeding after analysed vowels, therefore there were connections of the type [p'Vs], such as in the word *paśy* 'crimsons' [p'ɔ̃ʂi] and *pęset* 'tweezers' [p'ɛ̃ʂɛt]. Examined vowel was expected to be realized three times by each speaker. Nasalized vowels were assessed in a three-time-repeat of each word, because no other example of assumed phonetic structure was found. Examined speakers remembered word presented on the screen and were asked to speak out naturally on the agreed signal.

## Results and Discussion

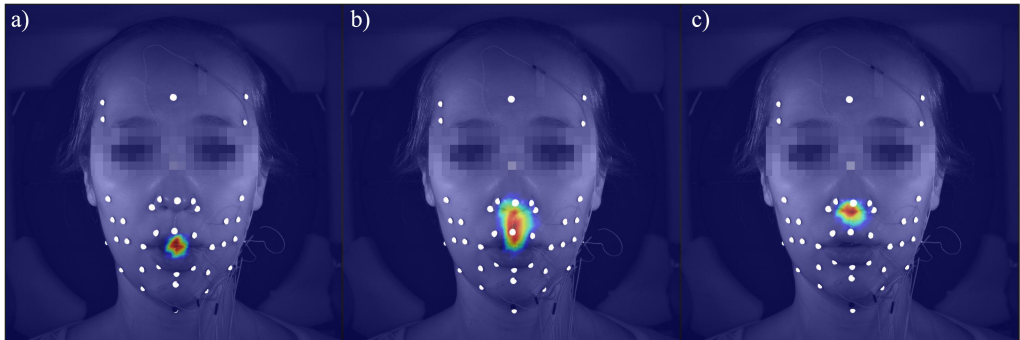
Used algorithms let calculate the move of the signal in time, as well as specify the frequency characteristics of analyzed segments. Thanks to that, each evaluated word got the picture of spatial distribution of acoustic field. Figures 5a, 5b and 5c enable to take a look at possibilities, that analysis with the use of acoustic camera gives.

The images illustrate the succeeding phases of nasalized vowel realization [ɔ̃ʂ] in the word 'paśy'. First phase of articulation is realized with the use of oral energy (Fig. 5a), the second one with simultaneous resonance of oral and nasal cavity (Fig. 5b), and the last part goes exclusively in nasal cavity (Fig. 5c).

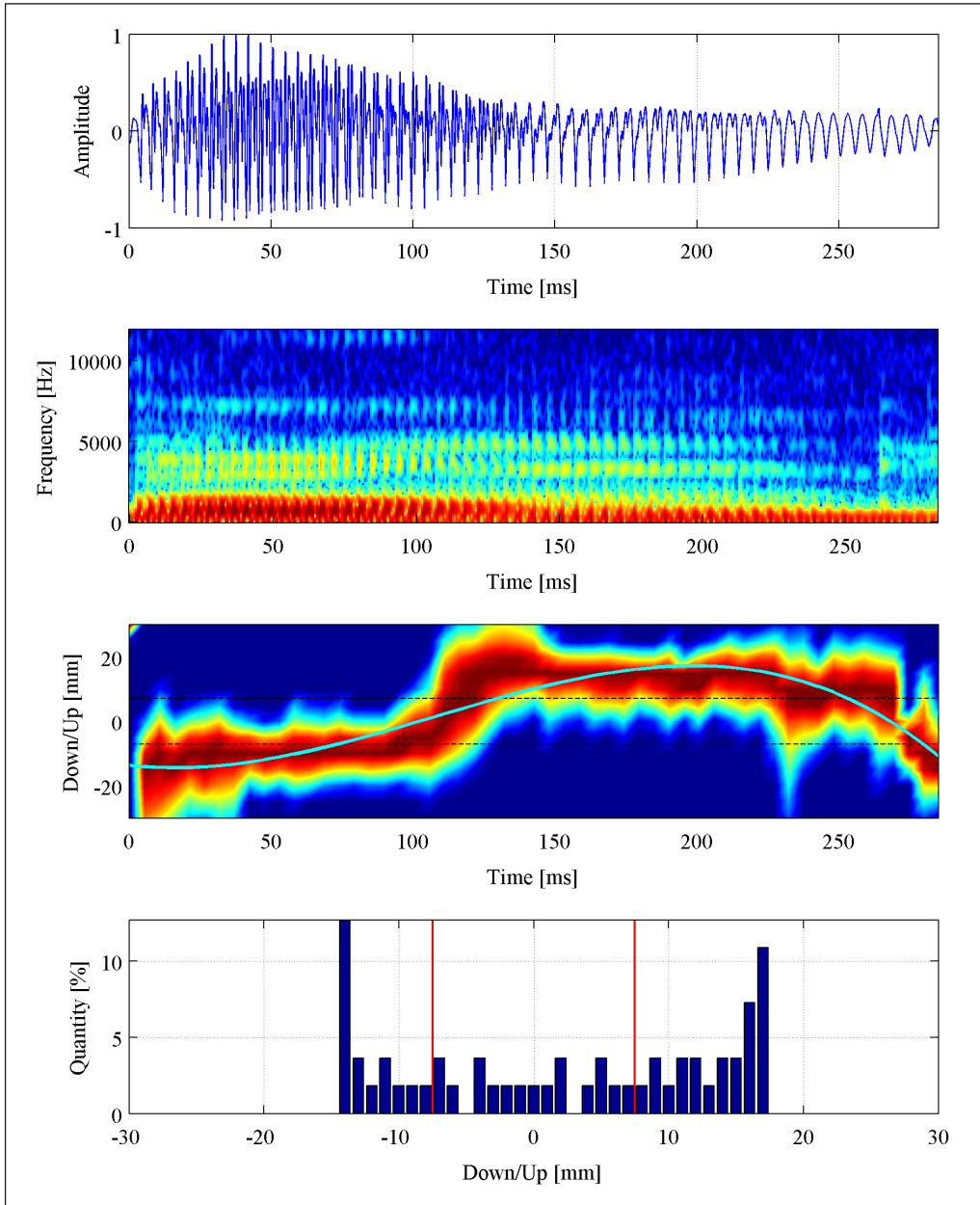
The diagram of spatial distribution of acoustic field was correlated with oscillogram, spectrogram, 3rd order polynomial approximation and histogram (Fig. 6). The position of articulograph sensor fixed above the red part of the upper lip (position 0 on the axis of spatial distribution of acoustic field top-bottom on the diagram 6) was taken as the point of division on the face of speaker. For the purpose of detection of stream of emission the threshold of decrease of acoustic pressure which amounts to 3 dB was taken.

In each signal the vertical space was analysed with the height of 61 mm and resolution of 1 mm. It was divided into three areas corresponding to different phases of articulation:

- Oral phase: acoustic signal was registered in the area starting from -30 mm to -8 mm (22 mm), the level of acoustic pressure was lower by at least 3 dB below 0 on the vertical axis (on the diagram 6 there is a section from 0 ms to around 70 ms);
- Oronasal phase (with simultaneous share of nasal and oral energy): acoustic signal was registered in the area from -7 mm to +7mm (15 mm, including 0), the difference in pressure above and below 0 was lower than 3 dB (on the diagram 6 there is a section from around 70 ms to around 140 ms and from around 250 ms to around 290 ms);
- Nasal phase: acoustic signal appeared in the area



**Figure 5.** Spatial distribution of the acoustic field synchronised with the image from video camera during realization of nasalized vowel [ɔ̃ʂ] in the word *paśy* 'crimsons' in the different articulation phases: a) oral, b) oronasal c) nasal (speaker ZK\_f, file 157)



**Figure 6.** Spatial distribution of the acoustic field correlated with oscillogram, spectrogram, 3rd order polynomial approximation and histogram of realization of nasalized vowel [ɔw̃] in the word *pąsy* 'crimsons' (speaker ZK\_f, file 157)

from +8 mm to +30 mm (22 mm), the level of acoustic pressure was higher of around 3 dB above 0 on vertical axis (on the diagram 6 there is a section from 140 ms to around 250 ms and from 290 ms to 300 ms).

Presented way of detecting of sources of sound were used in interpretation of pronunciation of Polish nasalized vowels in the onset of a word-medial stressed syllable before consonant [s]: [ɔw̃] in the word *pąsy* 'crimsons' and [ɛw̃] in the word *pę-*



set ‘tweezers’. All together 161 realizations of both vowels prepared by 20 speakers were examined. The table 1 below presents the average percentage and mean duration of distinguished phases (oral, oronasal and nasal) in the total duration of examined vowels.

may be applied in speech therapy; in particular, they may help diagnosticians and therapists of dyslalia. A detailed normative description will make it possible to accurately diagnose speech disorders and to precisely design treatment. The research results can be used in teaching phonetics

**Table 1.** The average percentage [%] and mean duration [ms] of distinguished phases (oral, oronasal and nasal) in the total duration of examined vowels

Vowel	Phase (mean)		
	Oral	Oronasal	Nasal
[ɔ̃]	35.41 %	42.86%	21.72%
	88.17 ms	106.72 ms	54.08 ms
[ɛ̃]	65.09%	33.66%	1.25%
	148.40 ms	76.74 ms	2.85 ms

The pronunciation of the Polish nasalized vowels consists of oral resonance combined with nasal resonance. The results of the analysis clearly indicate that the normative pronunciation of the Polish nasalized vowels is asynchronous in that nasal resonance is delayed in relation to oral resonance (such a claim appeared in certain earlier phonetic accounts). Previous Polish instrumental phonetic studies neither described the exclusive nasal resonance phase nor provided information on the proportion of particular phases in the total duration of nasal vowels. In this light, the results presented in the article are innovative.

## Conclusions and future work

A kind of novelty in the experiment described here was the use of microphone array, which allowed to examine the distribution of acoustic energy during articulation in a non-invasive way. The research presented in the study constitutes an important part of a normative description of contemporary Polish pronunciation in light of numerous controversies discussed over the last decades. The results

(both general and clinical), spoken word culture at philology, pedagogy and journalism studies or at acting departments at theatre and film schools. They can also be applied in systems of automatic analysis and synthesis of speech. The future goal is a description of oral, oronasal and nasal segments in disordered speech.

## Acknowledgments

Work described in this paper was supported by grant Nr 2012/05/E/HS2/03770 titled Polish Language Pronunciation. Analysis Using 3-dimensional Articulography with A. Lorenc as the principal investigator. The project is financed by The Polish National Science Centre on the basis of the decision Nr DEC-2012/05/E/HS2/03770.

## References

1. R. Krakow and M. Huffman, Instruments and techniques for investigating nasalization and velopharyngeal function in the laboratory: An

- introduction. In: M. Huffman and R. Krakow [eds.] *Phonetics and Phonology: Nasals, Nasalization, and the Velum*, Academic Press, San Diego 1993, pp. 3-59.
2. R. J. Baken and R. F. Orlikoff, *Clinical measurement of speech and voice*, 2nd edition, Taylor and Francis, New York, 2000.
  3. F. Bell-Berti, *J. Speech. Hear. Res.*, 1976, **19**, 225-240.
  4. M. P. Karnell, E. J. Seaver, and R.M. Dalston, *J. Speech. Hear. Res.*, 1988, **31**, 503-510.
  5. H. Koneczna, W. Zawadowski, *Przekroje rentgenograficzne głosek polskich*, PWN, Warszawa, 1951.
  6. B. Wierzchowska, *Fonetyka i fonologia języka polskiego*, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk Wrocław-Warszawa-Kraków-Gdańsk, 1980.
  7. K. L. Moll, and R. G. Daniloff, *J. Acoust. Soc. Am.*, 1971, **50**, 678-684.
  8. A. Serrurier, and P. Badin, A three-dimensional linear articulatory model of velum based on MRI data, *Proceedings of the 6th Interspeech and 9th European Conference on Speech Communication and Technology*, Lisboa, 2005.
  9. M. Stone, T. Shawker, T. Talbot, A. Rich, *J. Acoust. Soc. Am.*, 1988, **83**, 1586-1596.
  10. S. Horiguchi, and F. Bell-Berti, *Cleft Pal. J.*, 1987, **24(2)**, 104-111.
  11. O. Fujimura, J. E. Miller, S. Kiritani, A computer-controlled x-ray microbeam study of articulatory characteristics of nasal consonants in English and Japanese, *Proceedings of 9th International Congress on Acoustics*, Madrid, 1977.
  12. K. Perkell, M. Cohen, M. Svirsky, M. Matthies, I. Garabieta, and M. Jackson, *J. Acoust. Soc. Am.*, 1992, **92**, 3078-3096.
  13. J. J. Ohala, *J. Acoust. Soc. Am.*, 1971, **50(1)**, 140.
  14. D. Warren, *Cleft Pal. J.*, 1967, **16**, 279-285.
  15. M. Rothenberg, *J. Speech. Hear. Res.*, 1977, **20**, 155-176.
  16. S. G. Fletcher, and M. E. Bishop, *Cleft Pal. J.*, 1970, **7**, 610-621.
  17. R. M. Dalston, D. W. Warren, and E. T. Dalston, *Cleft Pal-Craniofac. J.*, 1991, **28(2)**, 184-189.
  18. D. Król, A. Lorenc, R. Świąciński, 2015, Detecting Laterality and Nasality in Speech with the Use of a Multi-Channel recorder, *Proceedings of 40th IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Brisbane, 2015.
  19. A. Lorenc, R. Świąciński, D. Król, Assessment of Sound Laterality with the Use of a Multi-Channel Recorder, *Proceedings of 18th International Congress of Phonetic Sciences*, Glasgow 2015.
  20. D. Król, Choice of analog-to-digital converters for audio measurements using MLS algorithm, *Proceedings of 15th European Signal Processing Conference*, Poznań, 2007.
  21. D. Król, On superiority of Successive Approximation Register over Sigma Delta AD converter in standard audio measurements using Maximum Length Sequences, *Proceedings of International Conference on Signals and Electronic Systems*, Kraków, 2008.
  22. D. Król, R. Wielgat, T. Potempa, P. Świętojański, Analysis of Ultrasonic Components in Voices of Chosen Bird Species, *Proceedings of Forum Acusticum*, Aalborg, 2011.
  23. O. L. Frost, An algorithm for linearly constrained adaptive array processing. *Proceedings of the IEEE*, 1972.
  24. P. Vary, R. Martin, *Digital Speech Transmission: Enhancement, Coding and Error Concealment*, John Wiley & Sons, 2006.
  25. D. Król, Macierze mikrofonowe i głośnikowe, In: T. P. Zieliński, P. Korohoda and R. Rumian. *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów w telekomunikacji: Podstawy, multimedia, transmisja*, PWN, Warszawa, 2014, pp. 665-695.
  26. A. Lorenc, Diagnosis of the pronunciation norm, *Logopedia* 42, <[http://www.logopedia.umcs.lublin.pl/images/1-278\\_Logop\\_42\\_ANG\\_ok.pdf](http://www.logopedia.umcs.lublin.pl/images/1-278_Logop_42_ANG_ok.pdf)>.

# Towards the Automatic Acoustical Avian Monitoring System

Robert Wielgat<sup>a,\*</sup>, Daniel Król<sup>a</sup>, Tomasz Potempa<sup>a</sup>, Paweł Koziol<sup>b</sup>,  
Agnieszka Lisowska-Lis<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*State Higher Vocational School in Tarnow, ul. Mickiewicza 8, 33-100 Tarnów, Poland*

<sup>b</sup>*Regional Directorate for Environmental Protection in Kraków, division in Tarnow, ul. Solidarności 5-9, 33-100 Tarnów, Poland*

\*Corresponding author: [rwielgat@poczta.onet.pl](mailto:rwielgat@poczta.onet.pl)

---

## Abstract

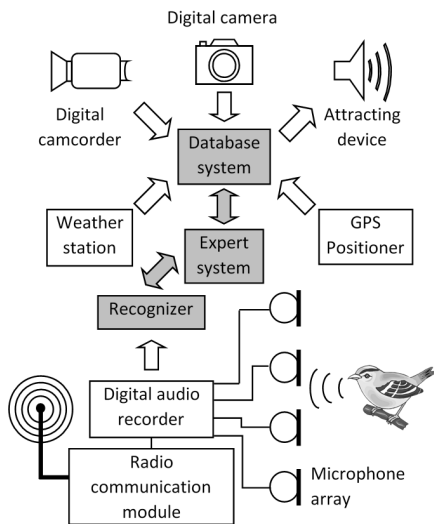
One of the crucial aspects of the environmental protection is continuous monitoring of environment. Specific aspect is estimation of the bird species population. It is particularly important for bird species being in danger of extinction. Avian monitoring programs are time and money consuming actions which usually base on terrain expeditions. Certain remedy for this can be automatic acoustical avian monitoring system, described in the paper. Main components of the designed system are: digital audio recorder for bird voices acquisition, computer program automatically recognizing bird species by its signals emitted (voices or others) and object-relational database accessed via the Internet. Optional system components can be: digital camera and camcorder, bird attracting device, wireless data transmission module, power supply with solar panel, portable weather station. The system records bird voices and sends the recordings to the database. Recorded bird voices can be also provoked by the attracting device. Application of wireless data transmission module and power supply with solar panel allows long term operation of digital sound recorder in a hard accessible terrain. Recorded bird voices are analysed by the computer program and labelled with the automatically recognized bird species. Recognition accuracy of the program can be optionally enhanced by an expert system. Besides of labelled sound recordings, database can store also many other information like: photos and films accompanying recorded bird voices/ sounds, information about localization of observation/ recordings (GPS position, description of a place of the observation), information about bird features and behaviour, meteorological information, etc. Database on the base of geographical/ geological digital maps can generate actual maps of bird population (presence, number of individuals of each species). Moreover data-base can trigger alerts in case of rapidly decreasing bird population. It is also possible to obtain new knowledge about bird species with data mining methods. The paper presents collected data on observed bird species (audio recordings, photos and films) as well as results of experiments testing particular components of the automatic acoustical avian monitoring system.

**Key words:** bird voices recognition, bird song recognition, hidden Markov models, dynamic time warping, HFCC, MFCC

---

## 1. Introduction

Environmental protection becomes nowadays more and more important issue in government policy of many countries. One of the crucial aspects of this policy is protection of avifauna biodiversity [1, 2]. In order to protect bird species especially endangered with extinction the knowledge about actual number and the map of presence as well as the count of particular bird species should be available. In order to gain these knowledge many terrain expeditions, actions of bird counting etc. are undertaken. These actions involve either skilled expert or volunteers and are usually time consuming and expensive [3]. Some remedy for this situation can be an automatic acoustical bird monitoring system [4-6].



**Figure 1.** Block diagram of the Automatic Acoustical Avian Monitoring System

The general concept of the system presented in Fig. 1 is as follows. Digital audio recorder located in the vicinity of observation place collects the sounds caused by bird voices via microphone array. Sounds can be also recorded by digital devices during terrain expedition. Recorded sounds are afterwards analysed and recognized (labelled

with bird species) by the program automatically recognizing bird voices. Information about recognized (labelled) birds voices is inserted into the data base.

The most crucial component of the system is the program automatically recognizing bird voices. Among different bird voices recognition methods the most reasonable seem to be dynamic time warping (DTW) [7] or hidden Markov models (HMM) [8]. These methods allow not only bird species recognition but also the type of bird communication signal identification.

The paper has following structure. Chapter 2 presents description of the system. Chapter 3 contains simple summary of the expeditions and observations. There are also presented results of experiments with automatic recognition of bird voices and with preselection. Those experiments were crucial for establishing the structure of a whole system. Moreover Chapter 3 presents discussion of the obtained results as well as a survey of the state of the art of acoustical bird monitoring systems. Chapter 4 contains conclusion and most important tasks to be done in the nearest future.

## 2. Materials and Methods

This chapter is divided into 4 parts. Part 2.1 describes expeditions and observations carried out in order to acquire material and subsequently to collect patterns in bird voices recognition program and in order to evaluate all the system. Part 2.2 presents electronic devices used in the system. One of the device is digital audio recorder automatically recording bird voices which are recognized by the computer program described in Part 2.3. Recognition process is supported by database and expert system presented in Part 2.4.

### 2.1. Expeditions and Observations

Application of bird voices recognition needs robust patterns of bird voices to achieve high recogni-

tion accuracy. Moreover appropriately described set of recordings is required for evaluation of the system performance. Therefore an effort has been undertaken to collect large set of recordings. At the beginning of the work there was assumed that recordings should be realized in various localizations, year and day period, weather conditions, levels of noise, kind of vocalizations etc.

### 2.1.1. Point-transects and observation points

Following the above assumption, in the year 2006-2011 there were designed some routs with observation points, so called point-transects [3]. Recordings, films, photos and observations has been carried out at each observation point. Locations for transects were tested and then modified if necessary. Alterations of transects were necessary because: they were too long, contained too many points, some points turned out to be not attractive for recordings, some areas were difficult to reach (especially during wintertime or early spring). The transects were arranged to cover the most varied ecosystems, and ones that were approachable for recordings. Every transect consisted of minimum 8 up to 10 fixed observation points. Distance between every two observation points was set at between 50 m and 400 m. Six transects were selected for frequent observation:

1. Tarnowiec Village – Radlna Village
2. Krzyskie Ponds
3. Stone Town Reserve
4. Polichty (Ciężkowicko-Rożnowski Landscape Park)
5. Rożnów Lake
6. Styr Reserve

Beside of transects with fixed observation points there have been visited less frequently transects with no fixed observation points. At these transects recordings and observations have been carried out when some interesting bird species have been heard or seen. During such an observation or recording, GPS position has been registered as well. The transects without fixed observa-

tion points had following locations:

7. Mydlniki
8. Wola Rzędzińska
9. Sanguszko Park in Tarnow
10. Niepołomice Forest
11. Biebrza National Park – Gugny Village
12. Biebrza National Park – Osowiec Fortress
13. Biebrza National Park – Dolistowo Village
14. Biebrza National Park – Dolistowo Stare Village
15. Biebrza National Park – Surroundings of Goniądz
16. Biebrza National Park – Ławki Swamp
17. Biebrza National Park – Honczarowska Dyke
18. Lahema National Park near Viitna Village – Estonia
19. City Park in Tallin – Estonia

Every transect was chosen to cover a specific ecosystem, and more than one ecosystem if possible. The ecosystems of interest were: fields and agricultural area, meadows, forests, swamps, river valleys, ponds and lakes, sea side, parks, town or village area. Field and agriculture area are covered in transects: 1, 2, 4, 5, 8, 11, 13, 15. Meadows are present in transects 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 11, 13, 15. Forests are represented in transects: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 17, 18. Ponds and lakes are in transects: 2, 4, 5, 7, 8, 12, 18. River valleys are in transects: 1, 3, 14, 15. Swamp are in transects: 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18. Parks are present in transects: 9, 19. Sea side is present in transect 19.

Besides of transects there have been chosen places being singular observation points. These points were chosen to make recordings in the specific area, or to record interesting bird species outside the transects. Point counts methodology of observation and recording was planned and carried out according to the point-transects methodology described in [3]. Point counts were chosen for recording in the area of parks as well as in more urban areas such as villages and towns. These points from the year 2006 to 2011 were: Zbylittowska Gora, Radlna village, Żabno town, State

Higher Vocational School (in town), Strzeleckich Park in Tarnow, Tarnow city centre, Cathedral in Tarnow. The observation point in Radlna Village is especially interesting because of external camcorder monitoring area in the neighbourhood of feeder (Fig. 2). It gives good opportunity to observe more shy bird species.



**Figure 2.** Digital stationary internet camcorder mounted in observation point in Radlna Village near the feeder

In the spring of the year 2009 also extra expedition was undertaken to swampy Pawężów meadow. During this expedition some interesting recordings were done of the species typical for the wetlands and swampy meadow. Two individual recording points were chosen in years 2009-2010 for recordings in industrial and waste disposal areas: Waste Disposal in Krzyż – where solid waste has been deposited, Settling Basins “Czajki” where the former industrial liquid waste disposal used to be, now under recultivation.

### 2.1.2. Observation Methodology

Observations and recordings were carried out going through the transect during the expedition. Frequency of the expedition was the highest in spring and the lowest in winter. The motivation was vocal activity of birds and number of species: the highest in spring and the lowest in winter. Exact number of expedition in each season of year is presented in table 1 in chapter „Results and Discussion”.

There were also different number of expedi-

tions dependently on the period of day. The greatest number of expeditions was carried out in the morning, noon and evening when the vocal activity of birds was the highest, and the least number of expeditions was carried out in the night. Table 2 in chapter “Results and Discussion” presents exact number of expeditions dependently on the period of day.

In order to discover some correlations between the period of a day and the bird vocalization, some of the expeditions (in spring) were repeated in the same place three times a day: in the morning, at noon and in the evening.

Every walk through the transect with fixed observation points took from about 2 hours to 4 hours. Walk through the transect with no fixed point or visit in the singular observation point was usually shorter: from about 1 hour to 2 hours.

The audio recordings lasted from about 5 min to 10 min (dependently on bird vocal activity), and were done at each observation point on the transect with fixed observation points. It gave approximately up to 2 hours of audio material per every expedition. The recordings were done digitally, as the WAV files, with sampling frequency 48 kHz or 96 kHz (dependently on recording device) and with 16 bit/sample resolution. Recording devices and other electronic equipment are described in details in chapter 2.2. Electronic Equipment.

Beside of audio recordings expedition participants tried to make films and photos of singing birds, what was helpful in later labelling of audio recordings. Moreover an approximated number of individuals of observed bird species was noted down even when they were not audio recorded, video recorded or photographed. Other optional information might be collected concerning the birds, and their behaviour: sex, age, type of sound, specific behaviour accompanying the vocalization, mimicry.

The GPS position has been estimated once for every singular observation point, and points on the transect with fixed observation point. For tran-

sects with no fixed observation points the GPS position has been estimated every time when some recordings of singing bird has been done.

For every expedition the weather data have been also determined and recorded. The local temperature, relative humidity and atmospheric pressure have been stored when possible. Beside of this weather from ICM has been also obtained.

For some transects with fixed observation points the general description of transect (concerning geology, soil, flora and fauna) and the flora description of particular observation points have been done.

### 2.1.3. Processing of Gathered Material

Processing of the audio recordings starts with marking the most representative for expedition bird voices. Adobe Audition 3.0 program has been used for marking the bird voices. This operation can be performed even by a medium skilled person. Marked bird voices have been published on the project web site, and the team of experts labelled the voices with Latin species name. When the experts did not agree with each other than the bird voices were not labelled. Marked voices were examples for labelling the rest of voices collected during expedition.

Bird voices could be compared to available photos or films when necessary. Properly labelled bird voices has been stored in database to become patterns and evaluation recordings for automatic bird voices recognition program.

## 2.2. Electronic Equipment

In order to record the bird voices properly and collect another information in the automatic acoustical avian monitoring system good electronic equipment is required. The most important is audio recording device capable to record bird voices with relatively high quality. Digital camera and digital camcorder are also important devices because images and films obtained by them can help to recognize bird species which voice is re-

corded. Not singing birds can be registered by this equipment as well. Another equipment like bird attracting device, GPS, weather station are of less importance, but can increase efficiency and quality of observations. More detailed description of every electronic device is presented in the subsequent chapters.

### 2.2.1. Audio Recording Device

The most important electronic device in the presented system is audio recording device. Bird voices have been recorded by one of two recording devices: notebook equipped with EDIROL-25 sound card or solid state recorder MARANTZ. The sounds have been saved in the uncompressed WAV format in order not to lose important information embedded in bird voices. Important parameter of audio recording devices is sampling frequency. In case of MARANTZ it is 48 kHz what allows to record the voices of highest spectral components up to 24 kHz (being the half of sampling frequency according to sampling theorem). This is basically sufficient for recording majority bird voices. However there are specific vocalization in some species of birds which contains spectral components laying in ultrasound range above 24 kHz. Therefore some records have been carried out by notebook equipped with EDIROL-25 sound card capable to record sounds with sampling frequency 96 kHz. In case of both recording devices hipercardioidal microphone TONSIL MC 358 has been used.

In spite of quite good parameters of used recording devices there were some drawbacks of the recording methods used so far during the expeditions. The most important were: sampling frequency limited to 48 kHz (in case of MARANTZ), big dimensions and not convenient way of recordings (in case of laptop and EDIROL-25 sound card), possibility to record only 2 channels. Therefore the new digital audio recorder has been constructed.

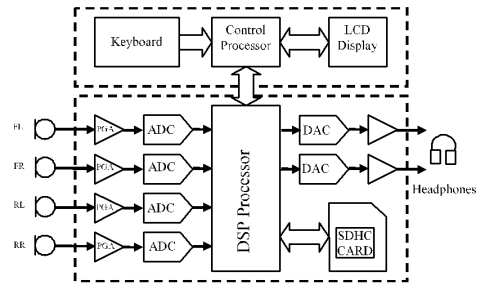
Digital Audio Recorder (Fig. 3) has been de-

signed as 4-channel recording audio device. There is possible to save 1, 2, and 4-channel WAV files. 4-channel recording can be carried out by microphone array being specifically spaced set of four microphones. Microphone array has been constructed using Panasonic Electret Capsules WM-61A which have linear frequency response in broad band. Using properly designed algorithm of processing the signals from microphone arrays helps to improve quality of digitized acoustic signal coming from chosen direction. Some algorithms e.g. time difference of arrival (TDOA) [9] can even enhance quality of signal coming from chosen point. The ability to enhance signal from chosen point can be very useful while recording bird voices from feeder or nest. Moreover there are also the methods which can locate sound source using microphone array [10]. This can be helpful to some extent while studying behaviour of particular singing bird.

Bit resolution of the registered signal was 16 bit per channel and maximal sampling frequency was 96 kHz. Recorded signals were saved in the uncompressed WAV format onto the SD/SDHC memory card. The largest available SDHC card with 32 GB memory allows non-stop recording for about 11,5 hours with the highest sound quality (4 channels and 96 kHz sampling frequency) and for about 185 hours (nearly 8 days) with the lowest sound quality (1 channel and 24 kHz sampling frequency). Recordings with the lowest sound quality can be very useful for long-term recording low frequency bird voices e.g. owls, doves, crows and others. It is especially important when the terrain is hard accessible and hostile.

Constructed audio recorder convert analogue sound signals acquired by microphones into digital form using SAR A/D converters. SAR A/D converter parameters such as: linearity of frequency characteristics, and SNR proved to be better in comparison with classical sigma-delta A/D converter [11, 12]. Slightly better performance of the SAR converter over the sigma-delta one has been

also observed in bird voices recognition experiments [13].



**Figure 3.** Four-channel Digital Audio Recorder

### 2.2.2. Bird Attracting Device

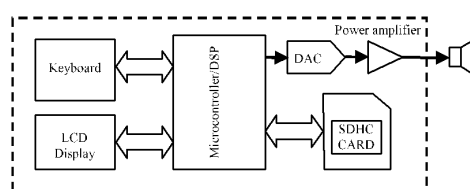
Bird attracting device (Fig. 4) can significantly increase efficiency of bird voices recording, especially shy species. However this device was not used in every expedition. Bird attracting device used in expedition was standard portable CD or MP3 player. Yet these device are not ergonomic and the sounds emitted by them has limited bandwidth and rather low volume.

Therefore bird attracting device has been designed and built. This is digital device which allows playback of bird attracting signals stored on the SD/SDHC card. Attracting device has been built using 32-bit microcontroller/DSP with ARM7 core. In order to make the work comfortable, device has been equipped with big LCD display and user-friendly menu allowing quick access to the given bird attracting sound. The device has got built-in amplifier, and loudspeaker for attracting sounds playback. Played signal has 16-bit



resolution and 96 kHz sampling rate what makes possible to emit sounds with ultrasound spectral components.

Audio recording device and attracting device is powered by 6 recharged batteries or AC adapter. Batteries make possible approximately 14 hours of continuous work. In order to extend working time of the device solar panel with appropriate electronic charging system can be used.



**Figure 4.** Bird attracting device

### 2.2.3. Digital Camera and Camcorder

Photos have been made by digital single-lens reflex (DSLR) camera equipped with telephoto lens. Three types of cameras have been used during expeditions: Canon EOS 20D and Canon EOS 5D with Canon EF 100-400mm f/4,5-5,6L IS USM lens and Canon EF 300mm f/2.8 IS USM lens (fig. 5), Nikon D80 with Nikkor AF-S 70-300mm f/4.5-5.6G IF-ED VR lens. Bird pictures support audio recordings and help the team of ornithologists to recognize observed bird species. The birds photography is one of the most difficult task in bird monitoring process. Pictures of birds are taken in terrain at various times of year in variable weather conditions.

In the birds photography DSLR cameras are mostly used nowadays. The DSLR should be fast and it can shot 6 to 10 frames per second for captures dynamic scenes from a birds life. Second important aspect is large memory buffer. The buffer gives possibility to capture series of photos in the internal memory faster than saving them into memory card. The camera should be easy in operating for changing parameters in short time

and without removing eyes from camera viewfinder. Inside the viewfinder of DSLR should be displayed the most important parameters like a Shutter Speed, Aperture, Exposure Mode, Focus Mode, ISO Sensitivity. Next most important aspect in dynamic photography is speed and accuracy of an autofocus. Resolution of Picture Sensor should be minimum 10 megapixels. With the Picture sensor connected is second parameter – Crop Factor. This commonly used term denotes the size ratio between a smaller sensor and a full frame 24x36 mm sensor. The crop factor is most often used to determine the “35mm equivalent” field of view for any given lens when used on the camera with sensor smaller than 24x36mm. Range of crop factor in not full-frame DSLRs is 1.3–2x.



**Figure 5.** Digital camera in use

The most important elements of the equipment in birds photography are lens. Taking pictures of small wild animals such as birds for example, usually require an expensive camera lens. Minimal Focal Length of telephoto lens used in the birds photography is 300 mm. The best telephoto lenses for bird photography have 500 mm and 600 mm. These are expensive and large and heavy camera lenses. The lens should be bright (F/2.8 or F/4.0) and sharp with very fast autofocus. Enlarge focal length of lenses is possible by Teleconverter. The teleconverter is a secondary lens which is mounted between the camera and the photographic lens. Most teleconverters have factor of 1.4 or 2.0.

Films made with digital camcorders provide additional information about appearance and be-

haviour of the observed bird species. These pieces of information together with digital picture support audio recordings. Films were made with hand-held camcorders type SONY DCR-SR210 with 15-fold optical zoom. Films were saved in MPEG-2 format. In one observation point on the Tarnowiec-Radlna transect there was also possibility to monitor the birds on-line via internet with stationary camcorder of type SONY SNC-RZ 50P with 26- fold optical zoom. Stationary internet camcorder allows observation without presence of human in place of an observation.

#### 2.2.4. Auxiliary Devices

Among auxiliary devices GPS positioner, portable weather station and radio communication module seem to be the most important.

GPS positioner is an additional device used together with digital audio recorder. The positioner allows to estimate GPS position of the recording place. The GPS data can be saved on the hard disc using XML format describing exact recording position. While recording in the fixed observation point GPS positioner is necessary only once during the first walk through the transect.

Birds vocalization strongly depends on weather. The most crucial measured parameters are: temperature, barometric pressure and relative humidity. These parameters were locally measured during some expeditions by the portable weather station. Most often these weather data have been obtained from ICM weather forecast [14]. Good portable weather station should be designed to monitor outdoor temperature, humidity, barometric pressure, wind speed, rainfall and chill factor. The station should also have possibility of connection with personal computer by RS232 interface, or USB interface.

Radio communication module allows wireless control of digital audio recorder. This is an optional module in the system. It may be built into the audio recorder. It provides wireless control of the audio recorder, for example when the recorder is

hidden. The person standing in the distance may switch it on and off at any time, with the remote control.

### 2.3. Automatic Bird Voices Recognition

Probably the most important element in automatic acoustical avian monitoring system is computer program capable of automatically recognizing bird voices. Using this program, bird species or communication signal recognition can be done completely automatically without the need of human presence. There are different recognition methods. In case of bird voices recognition the most reasonable methods seem to be dynamic time warping (DTW) [7, 14] or hidden Markov models (HMM) [8]. These methods allow not only bird species recognition but also the type of bird communication signal identification.

Recognition process can be divided into two phases:

- training phase
- classification phase

During the training phase of the recognition procedure assumed in the system, digital signals recorded for every bird species are detected and labelled with bird species label and signal type label. Moreover for every type of signal the minimal and maximal frequency of the signal should be determined. Some other information of the signal like time and date of recording, GPS position during recording, weather data etc. are also determined. Certain parameters from the signal are calculated too. Process of the labelling, determination of minimal and maximal frequency and giving additional information is carried out manually or semi-automatically. Appropriately designed software can be very helpful in this process.

Afterwards signal is digitally filtered by the filter of the lower and upper frequency being the minimal and maximal frequency of the signal. Afterwards feature extraction procedure on the filtered signal is carried out. Popular feature extraction method are MFCC [16] and HFCC [15]. After

feature extraction procedure signal representation in a sequence of feature vector form is obtained. This representation is called a pattern. In case of DTW recognition method, labelled original signal, filtered signal, signal parameters and other data are saved in the database. In case of HMM method additionally for every signal type HMM model is created from the patterns representing signal type.

Classification phase depends on the task to accomplish. The simplest but practically very useful task is species detection. Detection of ural owl (*Strix uralensis*) by voice can be given as an example. Species detection procedure can be carried out as follows:

1. Filtering the whole signal in the frequency range specific for given signal type belonging to detected species.
2. Signal detection which is usually based on energy threshold method.
3. Preselection step which allows to calculate signal parameters like signal length, X coordinate of squared signal mass center, X coordinate of squared FFT mass center, signal-to-noise ratio. These parameters can help decrease significantly the number of patterns or recognized class resulting in lower number of wrong recognitions and shorter recognition time [17].
4. Feature extraction usually based on Mel frequency cepstral coefficient (MFCC) method. The newer method which proved to be better than MFCC in bird voices recognition is Human factor cepstral coefficients (HFCC).
5. Classification which can be DTW or HMM method. For signal rejected at the preselection step DTW in its word spotting form can be used. HMM method in case of bird voices recognition uses whole-word Markov models. For DTW method decision that the recognized signal belongs to detected signal type is taken when the DTW distance between recognized signal and at least one pattern is below predefined threshold. For HMM method

decision that the recognized signal belongs to detected signal type is taken when the probability that the signal belongs to the HMM model for signal type is above predefined threshold. When the DTW distance is above the threshold or HMM probability is below the threshold then the signal can be eventually recognized by the word spotting procedure. When this procedure do not recognize the signal then it is marked as unrecognized.

6. Point from 1 to 5 are repeated for every signal type belonging to detected species until any signal type is detected. If none signal type is detected then the species is not recognized.

More complicated recognition task is species recognition by voice. This procedure can be realized like species detection procedure repeated for all the species. In order to limit number of species to be checked out an expert system can be used.

## 2.4. Database and Expert System

Labelled recognized bird voices with associated data are inserted into the database. Here after some analysis all the data can give useful pieces of information. The most important pieces of information seem to be maps of occurrence of particular bird species, and alerts in case of drop in population of bird species. Moreover expert system using data from database can significantly enhance recognition accuracy. It is also possible to obtain by data mining methods new knowledge embedded in data from database.

### 2.4.1. Expert System

In the presented acoustical avian monitoring system an expert system provides additional support in preselection process based on metadata and context information. There is used rule-based representation formalism. Knowledge base is built on the basis of ornithologists expertise but can also be discovered with an expert system. The inference mechanism is based on a forward chaining

strategy. The strategy searches the knowledge base until it finds a rule where the antecedent is known to be true. After any rule is found the consequent is obtained and therefore the conclusion can be made. Exemplary rules of the expert system have been shown below:

R1: IF observation\_date BETWEEN first\_day\_of\_october AND last\_day\_of\_march THEN NOT Golden Oriole (Confidence factor: 99%);

R2: IF height\_of\_bird < 100 cm OR height\_of\_bird > 125 cm THEN NOT White\_Stork (Confidence factor: 95%);

In acoustical avian monitoring system Prolog logic programming language was chosen.

### 2.4.2. Database

The acoustical avian monitoring system is implemented with MVC (Model-View-Controller) architectural pattern. Database, represented in MVC architecture in Model tier, describes entities as well as relationships between them. Database model represents two categories of information:

- encyclopedical data;
- experimental data.

Encyclopedical data includes well-known knowledge about bird species, especially taxonomy, appearance and anatomical features, usual habitats and nutrition, typical singing time, approximated migration and breeding dates as well as voice characteristics. Experimental data includes information which are gathered during observations. Since there were proposed precise procedures, defining how data during observations are collected, database had to be adopted for storing information coming from different sources and with distinctive structure. Some of the procedures are used for observations with audio recording, some of them are used for presence of species ascertainment and the other ones are used for bird counting. All procedures delivers very useful information which are utilized by recognizer, especially in preselection process but also in data mining. In acoustical avian monitoring sys-

tem PostgreSQL DBMS (Database Management System) was chosen.

### 2.4.3. Data Mining Engine

Data mining engine is used to extract hidden, concealed knowledge from entered sound recordings and metadata, context information. Techniques of classification and clusterization in data mining process are used. Since the mining process is ineffective if the sound recordings as well as metadata and context information sets are not a good representation of the sets universum it is necessary to gather as much sound recordings, metadata and context information as possible. Therefore there is proposed alternative path of collecting information. Besides entering alphanumeric (e.g. text, numbers) and multimedia data via recognizer, alphanumeric data can be entered via internet browser and application implemented with Flex and Java technology. Java technology represents second tier (i.e. domain logic) in MVC architectural pattern, whereas Flex technology represents third tier (i.e. user interface view). In data mining, classification with neural networks or naïve Bayes could be used to determine preselection based both on signal parameters as well as metadata and context information. Classification based on metadata and context information are sources of experimental knowledge which, after formalization, can formulate new rules in an expert system.

## Results and Discussion

In the period from August 2006 till August 2011, 118 scientific expeditions dedicated to bird species recordings were undertaken. The collected and acoustically analysed material was about 250 hours of recordings. 88 bird species vocalizations were recorded and analysed. This was accompanied with the compulsory and optional information collected.

**Table 1.** The number of expeditions during each season of the year between August 2006 and August 2011

Season of the year	Number of expeditions
Spring	94
Summer	45
Autumn	20
Winter	20

**Table 2.** The number of expedition dependently on the time of the day between August 2006 and August 2011

Time of the day	Number of expeditions
Morning	56
Noon	54
Evening	48
Night	6

**Table 3.** List of bird species audio recorded (A), photographed (P) and video registered (V) between August 2006 and August 2011

No.	Species	A	P	V	No.	Species	A	P	V
1.	Cygnus olor	+	+	+	61.	Pica pica	+	+	+
2.	Anas platyrhynchos	+	+	+	62.	Corvus monedula	+	+	+
3.	Anas clypeata	-	+	+	63.	Corvus frugilegus	+	+	+
4.	Aythya ferina	-	+	+	64.	Corvus cornix	-	+	+
5.	Aythya fuligula	-	+	+	65.	Corvus corax	+	+	+
6.	Mergus merganser	-	+	+	66.	Cinclus cinclus	-	-	+
7.	Apus apus	+	-	-	67.	Fringilla coelebs	+	+	+
8.	Botaurus Stelaris	+	-	-	68.	Serinus serinus	+	+	+
9.	Egretta alba*	-	+	+	69.	Carduelis chloris	+	+	+
10.	Ardea cinerea	-	+	+	70.	Carduelis carduelis	+	+	+
11.	Ciconia nigra	-	+	+	71.	Carduelis spinus	+	+	+
12.	Ciconia ciconia	-	+	+	72.	Carduelis cannabina	-	+	-
13.	Columba livia	+	+	+	73.	Carpodacus erythrinus	+	+	+
14.	Columba palumbus	+	+	+	74.	Pyrrhula pyrrhula	+	+	+
15.	Streptopelia decaocto	+	+	+	75.	Coccothraetus coccothraetus	-	+	-
16.	Streptopelia turtur	+	+	+	76.	Riparia riparia	+	+	+
17.	Upupa epops	+	-	+	77.	Hirundo rustica	+	+	+
18.	Cuculus canorus	+	-	-	78.	Delichon urbicum	+	+	+
19.	Phasianus colchicus	+	+	+	79.	Motacilla flava	-	+	+
20.	Podiceps cristatus	+	+	+	80.	Motacilla cinerea	-	+	+
21.	Phalacrocorax carbo	-	+	+	81.	Motacilla alba	+	+	+
22.	Circus aeruginosus	-	+	+	82.	Bombycilla garrulus	+	+	+
23.	Accipiter gentilis	-	+	+	83.	Troglodytes troglodytes	+	+	+
24.	Accipiter nisus	-	+	-	84.	Erithacus rubecula	+	+	-
25.	Buteo buteo	+	+	+	85.	Luscinia luscinia	+	+	-
26.	Aquila chrysaetos	-	+	+	86.	Luscinia megarhynchos	+	-	-
27.	Falco tinnunculus	+	+	+	87.	Luscinia svecica	+	+	+

28.	<i>Falco peregrinus</i>	+	+	+	88.	<i>Phoenicurus ochruros</i>	+	+	+
29.	<i>Aquila pomarina</i>	-	-	+	89.	<i>Saxicola rubetra</i>	-	+	-
30.	<i>Porzana porzana</i>	+	-	-	90.	<i>Saxicola rubicola</i>	+	+	+
31.	<i>Crex crex</i>	+	-	-	91.	<i>Turdus merula</i>	+	+	+
32.	<i>Gallinula chloropus</i>	+	+	+	92.	<i>Turdus pilaris</i>	+	+	+
33.	<i>Fulica atra</i>	+	+	+	93.	<i>Turdus philomelos</i>	+	+	+
34.	<i>Grus grus</i>	+	-	+	94.	<i>Turdus viscivorus</i>	-	+	+
35.	<i>Charadrius dubius</i>	+	+	+	95.	<i>Acrocephalus paludicola</i>	+	-	-
36.	<i>Vanellus vanellus</i>	+	+	+	96.	<i>Acrocephalus schoenobaenus</i>	+	-	-
37.	<i>Calidris alpina</i>	+	+	+	97.	<i>Acrocephalus palustris</i>	+	-	-
38.	<i>Gallinago gallinago</i>	+	+	+	98.	<i>Acrocephalus scirpaceus</i>	+	-	-
39.	<i>Scolopax rusticola</i>	+	-	-	99.	<i>Acrocephalus arundinaceus</i>	+	+	-
40.	<i>Limosa limosa</i>	+	-	-	100.	<i>Sylvia communis</i>	+	+	+
41.	<i>Numenius arquata</i>	-	+	+	101.	<i>Sylvia borin</i>	+	-	-
42.	<i>Larus ridibundus</i>	+	+	+	102.	<i>Sylvia atricapilla</i>	+	+	+
43.	<i>Sterna hirundo</i>	-	+	+	103.	<i>Phylloscopus collybita</i>	+	+	+
44.	<i>Chlidonias niger</i>	+	+	+	104.	<i>Phylloscopus trochilus</i>	-	+	-
45.	<i>Chlidonias leucopterus</i>	+	+	+	105.	<i>Phylloscopus sibilatrix</i>	+	+	+
46.	<i>Strix aluco</i>	+	-	-	106.	<i>Regulus regulus</i>	+	+	+
47.	<i>Strix uralensis</i>	+	-	-	107.	<i>Muscicapa striata</i>	-	+	-
48.	<i>Asio otus</i>	+	+	+	108.	<i>Ficedula albicollis</i>	-	+	-
49.	<i>Jynx torquilla</i>	+	+	+	109.	<i>Aegithalos caudatus</i>	+	+	+
50.	<i>Picus viridis</i>	+	+	+	110.	<i>Parus caeruleus</i>	+	+	+
51.	<i>Dryocopus martius</i>	+	+	+	111.	<i>Parus major</i>	+	+	+
52.	<i>Dendrocopos major</i>	+	+	+	112.	<i>Remiz pendulinus</i>	-	-	+
53.	<i>Dendrocopos syriacus</i>	-	+	+	113.	<i>Sitta europaea</i>	+	+	+
54.	<i>Dendrocopos medius</i>	-	+	+	114.	<i>Oriolus oriolus</i>	+	+	-
55.	<i>Emberiza citrinella</i>	+	+	+	115.	<i>Lanius collurio</i>	+	+	+
56.	<i>Emberiza hortulana</i>	+	-	-	116.	<i>Lanius excubitor</i>	+	+	+
57.	<i>Emberiza schoeniclus</i>	+	-	+	117.	<i>Sturnus vulgaris</i>	+	+	+
58.	<i>Emberiza calandra</i>	-	+	-	118.	<i>Passer domesticus</i>	+	+	+
59.	<i>Alauda arvensis</i>	+	+	+	119.	<i>Passer montanus</i>	+	+	+
60.	<i>Garrulus glandarius</i>	+	+	+					

Table 1 presents exact number of expedition in each season of the year in the time between August 2006 and August 2011. Exact number of expedition dependently on the time of the day in the same years presents Table 2.

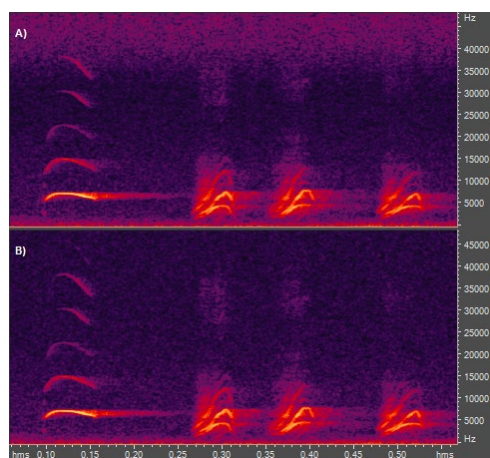
The vocalizations were recognized and marked using ADOBE AUDITION tools. The compulsory and optional information was stored in database. Such information are collected in the database, to join them with the vocalizations. Simultaneously with the audio recordings the audio-video recordings and pictures were prepared. In the time between August 2006 and August 2011 about 100 hours of audio-video recordings were done, which includes 91 bird species. For the mentioned time 97 bird species were pictured. Table 3 presents list of species audio recorded (A), photographed (P) or video registered (V). The history of expeditions, representative bird audio samples, video recordings as well as pictures are presented on the project web page [18].

### 3.1. Recognition results

In order to evaluate influence of various factors on recognition accuracy a couple of experiments have been carried out.

#### 3.1.1. Type of A/D Converter

The first recognition experiment concerned the influence of A/D converters. Two types of A/D converters sigma-delta (SD) and SAR have been tested. Comparison of spectrograms for sigma-delta and SAR converters is presented on Fig. 6. As can be noticed the SAR converter indicates lower noise level than the sigma-delta one in the higher frequency range.



**Figure 6.** Comparison of spectrograms of bird voices for a) sigma-delta A/D converter, b) SAR A/D converter

**Table 4.** Recognition accuracies for accomplished experiments. Abbreviations not explained in the text: Filtr. – filtration type, N – none, HP – high pass, Class. – classifier, Ex. No. – experiment number, Avg. accu. – average recognition accuracy, CF – *Corvus frugilegus*, CM – *Corvus monedula*, PMa – *Parus major*, PMo – *Passer montanus*, TM – *Turdus Merula*

ADC	Filtr.	Class.	Accuracy [%]					Avg. accu.
			Species					
			CF	CM	PMa	PMo	TM	
SAR	N	HMM	100	95,25	100	15,18	56,11	<b>77,71</b>
		DTW	99,87	96,75	100	100	100	<b>99,32</b>
	HP	HMM	100	97,25	100	90,63	91,11	<b>95,80</b>
		DTW	100	96,75	100	100	100	<b>99,35</b>
SD	N	HMM	100	94,25	100	23,61	51,39	<b>75,06</b>
		DTW	100	97,25	100	99,38	100	<b>99,32</b>
	HP	HMM	100	97,25	100	92,50	89,17	<b>95,78</b>
		DTW	100	96,5	100	100	100	<b>99,30</b>

**Table 5.** Error rate for accomplished experiments. Abbreviations not explained in the text: Avg. error – average error rate., the rest of abbreviations like in Table 4

ADC	Filtr.	Class.	Error rate [%]					Avg. error
			Species					
			CF	CM	PMA	PMo	TM	
SAR	N	HMM	0	4,75	0	85,63	43,89	<b>26,85</b>
		DTW	0,13	3,25	0	0	0	<b>0,68</b>
	HP	HMM	0	2,75	0	4,69	8,89	<b>3,10</b>
		DTW	0	3,25	0	0	0	<b>0,65</b>
SD	N	HMM	0	5,75	0	77,50	48,61	<b>26,37</b>
		DTW	0	0	0	2,75	0	<b>0,55</b>
	HP	HMM	0	2,75	0	4,81	10,83	<b>3,63</b>
		DTW	0	3,5	0	0	0	<b>0,7</b>

As can be seen from Tables 4 and 5 slightly better overall results have been obtained in case of SAR converter over the Sigma-delta (SD) one. Besides of influence of the type of A/D converter on recognition accuracy there were also examined influence of high-pass filtering and classification method (DTW or HMM). Comprehensive description of the research can be found in [13].

### 3.1.2. Prefiltration

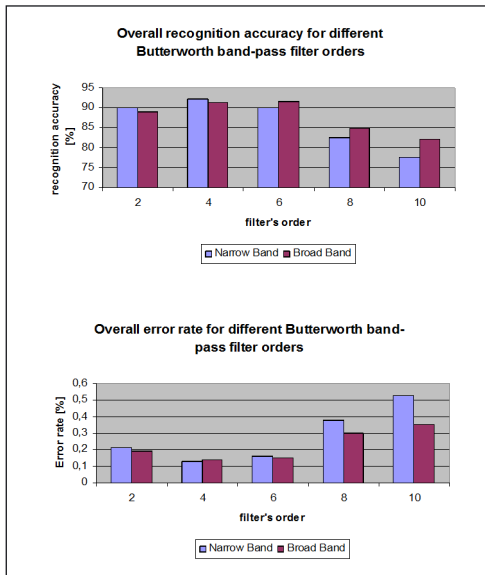
Another type of experiment examined influence of band pass filtration of the bird voice acoustical signal on recognition accuracy [19]. This process was called prefiltration. Results are summarized in table 6. As a classification method HMM was used.

**Table 6.** Summary of recognition accuracies and error rates for accomplished experiments. Abbreviations: NF – not filtered (reference results), BB6(4) – prefiltration with 6(4)-order filter in broad band, NB4 – prefiltration with 4-order filter in narrow band, GLP – global low-pass prefiltration with 200 Hz cut-off frequency, GBP – global band-pass prefiltration with 200 Hz and 17000 Hz cut-off frequencies

	Recognition accuracy				
	NF	BB6	NB4	GLP	GBP
Total	86,34	91,47	92,12	93,24	93,33
	Error rate				
	NF	BB4	NB4	GLP	GBP
Total	0,21	0,14	0,13	0,12	0,11



Results from Table 6 show that after prefiltration a significant improvement in bird voices recognition accuracy can be achieved. However, high recognition accuracy and low error rate strongly depend on filter order what has been shown on Fig. 7.



**Figure 7.** Recognition accuracies and error rates for prefiltration with IIR band pass Butterworth filters of different orders

### 3.1.3. Preselection

Besides of prefiltration techniques also preselection has been applied in order to enhance bird voices recognition accuracy. Detailed description of preselection methods is beyond scope of this paper and can be found in [17].

Here only the best achieved results of preselection based on the signal length as the preselection parameter are presented in Table 7. Parameters: Pc, Sn, Sp, Ac and Fm result from ROC (Receiver Operating Characteristic) analysis [20]. Definitions of parameters PW, WW, SP, WZW and WPK are given in [17]. Discussion on most important aspects of preselection process is presented in chapter 3.2.

### 3.1.4. Choice of feature extraction and microphone type

Five birds species were recorded and analysed in performed experiments:

- House Sparrow – *Passer domesticus*
- Common Swift – *Apus apus* (flush)
- Great Tit – *Parus major*
- Rock-dove – *Columba livia*
- Chaffinch – *Fringilla coelebs*

**Table 7.** Preselection quality coefficients with signal length as the preselection parameter for different bird species in interval method. Pc – precision, Sn – sensitivity, Sp – specificity, Ac – accuracy, F-measure

BS <sup>a</sup>	PM	DM	CF	TM	GG	AS	FC	mean
PW	216	352	242	349	213	259	298	-
WW	687	418	1013	1827	1199	776	1631	-
SP	100	100	100	100	100	100	100	100
WZW	69.7	88	60.5	39.2	41.8	63.2	44.5	53.7
WPK	17.7	45.5	16.8	18.1	17.4	18.1	17.2	21.5
Pc	0.31	0.84	0.24	0.19	0.18	0.33	0.18	0.33
Sn	0.7	0.88	0.61	0.39	0.42	0.63	0.44	0.58
Sp	0.75	0.97	0.68	0.72	0.68	0.79	0.67	0.75
Ac	0.74	0.96	0.67	0.68	0.64	0.77	0.64	0.73
Fm	0.43	0.86	0.34	0.26	0.25	0.44	0.26	0.41

<sup>a</sup>BS – bird species, PM – *Parus major*, DM – *Dendrocopos major*, CF – *Corvus frugilegus*, TM – *Turdus merula*, GG – *Garulus glandarius*, AS – *Acrocephalus scirpaceus*, FC – *Fringilla coelebs*

Recordings were done in Tarnow, in the town centre (city park: *Parus major*, *Columba livia*, *Fringilla coelebs*, and high buildings: *Apus apus* (sounding of flush), *Passer domesticus*), in August 2006. A 24bit/96kHz sigma delta analog-to-digital converter and two capacitive microphones were used in experiments. The first microphone was of unidirectional hyper-cardioid type, while the second one was a cardioidal microphone. There were 10 examples of bird voice per one species in the training set recorded by two microphones. Because there was limited time of experiments and limited number of particular individuals of bird species, the number of birds voices per one species in testing set is different. The structure of the testing set is shown in Table 8.

**Table 8.** Structure of the testing set

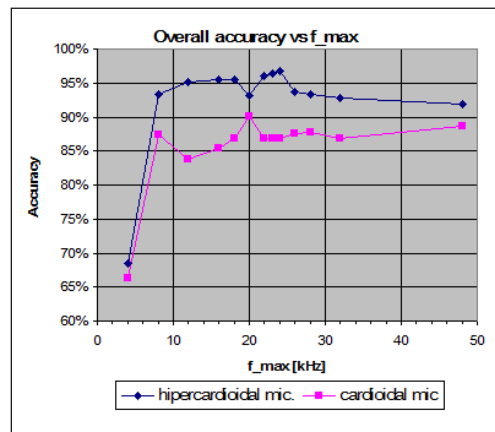
Bird species	Number of examples
<i>Passer domesticus</i>	17
<i>Apus apus</i>	64
<i>Parus major</i>	25
<i>Columba Livia</i>	63
<i>Fringilla Celebes</i>	95

After the acquisition, MFCC and HFCC feature extraction methods had been used. As a classification method the DTW method has been used. Detailed description of the recognition procedure can be found in [15]. Results of the recognition are presented in table 9. As can be seen the best result has been achieved with HFCC features.

**Table 9.** Overall accuracy of the bird species recognition by different microphones and signal features

	Hipercardioidal microphone	Cardioidal microphone
MFCC	82.97 %	87.98 %
HFCC	91.91 %	88.65 %

In the next experiment the problem of frequency range has been investigated using only HFCC as signal features (since they were observed to be more efficient than MFCC). In this experiment upper limit of the recognized signal frequency band has been changed from 4 kHz to 48 kHz. Obtained results are shown in Fig. 8. The best recognition result has been achieved with hipercardioidal microphone where the frequency band has been limited to about 24 kHz.



**Figure 8.** Overall accuracy versus maximal frequency for two types of microphone used in the research

Presented recognition results are relatively good but they were obtained in the closed set experiment without another real world sounds. Therefore, a preliminary open set experiment was carried out only for the hipercardioidal microphone recordings using optimal feature extraction parameters values found in previous experiments. Results are presented in table 10. This experiment reflects to some extent real world application of the investigated methods where system does not take decision about recognized sound if the smallest DTW distance between sound pattern and recognized sound falls above some threshold. It gives some possibility to reject the sounds not being bird voices under consideration.

**Table 10.** Overall accuracy of the open-set bird species recognition for recordings made by hypercardioid microphone and optimal parameters values. Th – DTW distance threshold, CR – correctly recognized, R – rejected, FR – Falsely recognized

Bird species	Th	CR	R	FR	Recognition accuracy
<i>Columba livia</i>	5,7	23	40	0	36,51%
<i>Apus apus</i>	2,4	7	57	0	10,94%
<i>Parus major</i>	8,5	14	11	0	56,00%
<i>Passer domesticus</i>	2,2	1	16	0	5,88%
<i>Fringilla coelebs</i>	8,1	48	47	0	50,53%

During recognition in open set a DTW distance thresholds have been experimentally established for every bird species patterns. Threshold values were optimized in order to achieve 0 % false classification. Recognition accuracy in open set experiment was calculated according to the following formula:

$$A = \frac{C}{C + R} \cdot 100\% \quad (1)$$

here:

A – recognition accuracy in [%]

C – number of the correctly recognised sounds

R – number of the rejected sounds.

### 3.2. Discussion

Majority of expeditions have been carried out in natural environment. Only a few bird species have been recorded, video registered or photographed in somewhat artificial environment like an aviary is.

From Table 1 it is evident that the majority of expeditions took place in spring-summer season. In the autumn-winter season there have been only 40 expeditions. That was because of lower vocal activity and presence of lower number of species in autumn-winter season. During this season there are also usually hard weather conditions like continuous rains, snow, frost, strong wind in Poland. Such a conditions can cause damage of the equipment and are bad for making audio recordings.

These conditions cause also lower vocal activity of birds.

Lower vocal activity of birds or its lack in the night is also the reason for lower number of expeditions carried out in the night (Table 2). These expeditions are mainly for recording of species with typical night style of life like owls, nightingales or some crakes.

Looking at Table 3 it can be stated that the representatives of majority of orders observed in Poland are present among the listed species. There are only no representatives of Gaviiformes, Procellariiformes, Phoenicopteriformes, Pteroclitiformes because birds of these orders are very rarely seen in Poland. The number of bird species with registered voices includes nearly 20 % of the species ever seen in Poland, what seems to be quite a big number. However the number of registered bird voices should contain complete set of bird voices and some set of sounds not being bird voices in order to create good automatic avian monitoring system. From authors' experience every type of sound should be repeated about 100 times in various conditions.

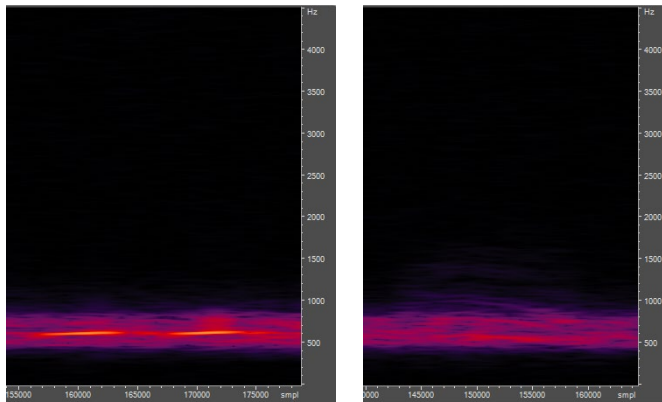
The gathered material is continuously labelled and the patterns for automatic recognizer are being prepared. This is however very difficult and time consuming process, therefore many recordings, films or photos have not been analysed yet.

Recognition experiments have been carried out according to somewhat different methods

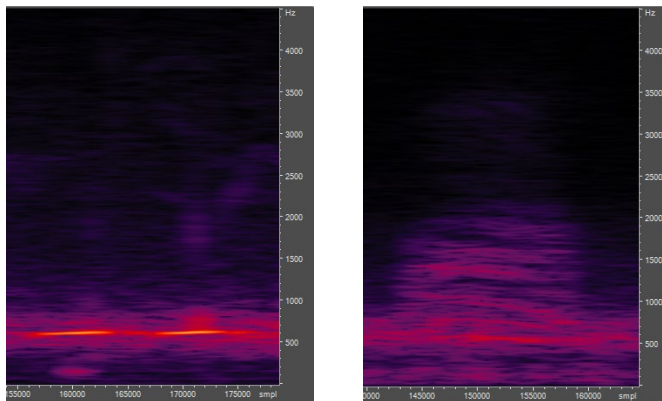
than that presented in chapter 2. Results of the chronologically first experiment presented in table 9 are relatively good but they were obtained in the closed set experiment without other real world sounds. Moreover the signals have not been filtered. This experiment was carried out only to find the best microphone and feature extraction method. From the results conclusion can be drawn, that the most promising features are HFCC coefficients and hipercardioidal microphone is better than cardioidal one. Hipercardioidal microphone has more narrow directivity pattern. In the future research comparison of hipercardioidal microphone and microphone array is planned.

The second experiment confirmed the positive influence of filtration for recognition accuracy. As

one can see in Fig. 8, decreasing the maximal frequency has led to increasing accuracy to the point close to the end of microphone pass-band. After this point recognition accuracy decreases again. Explanation of this phenomena can be following: decreasing maximal frequency limits the energy of noises of spectrum above upper boundary of the microphone frequency response. Because this noises bear nearly no useful information and cause disturbances in the classification process, their limitation causes increasing of the recognition accuracy. On the other hand, decreasing maximal frequency below the upper boundary of the microphone causes cutting off important information laying in the bird voice spectrum thereby decreasing overall recognition accuracy.



**Figure 9.** Spectra of signals filtered by 10th order band-pass Butterworth filter. a) *Upupa epops* voice; b) *Corvus frugilegus* voice



**Figure 10.** Spectra of signals filtered by 4th order band-pass Butterworth filter. a) *Upupa epops* voice; b) *Corvus frugilegus* voice

Positive influence of the filtration has been also proved in another research [19]. In these experiments a little bit surprising results have been achieved as for the optimal order of the species specific band pass filters. It turned out that very selective and demanding filtration by 10th order filter gave worse results than less selective and less computationally demanding filtration by 4th order filters. An explanation of this phenomena can be as follows: prefiltration with higher order filters removes many noises and disturbances from outside of the species specific frequency range and this is of course positive effect of prefiltration. However, very selective prefiltration has some serious negative effects which are especially strong while filtering in the narrow bands. Spectra of two voices belonging to different species become similar as shown in Fig. 9. Similarity of the spectra causes similarity of the MFCC coefficients and decreasing recognition accuracies. The same spectra become much less similar when filtering with lower order filters as shown in Fig. 10. Therefore two signals filtered with lower order filters are easier to distinguish and in effect easier to recognize.

Results for open set recognition are presented in Table 10. This results are much worse from results obtained in the closed set experiment (Table 10). However it should be noted that in open set experiment, thresholds were optimised in order to obtain 0 % falsely recognised species. The recognizer took only two types of decision: signal is recognized and signal is rejected. For some bird voices there was big number of the rejected signals. The reason for this was low SNR of the signal. However big number of the rejected signals is not harmful for some applications. If we think about open set recognition procedure as of the procedure indicating presence or absence of the particular species then it is much better to have information about presence of particular bird species with 100 % confidence factor once a day than to have many pieces of information with for instance 80 % confidence factor. The second situation can

generate many false alarms which can cause not necessary waste of time and money.

Number of patterns needed for recognition process can be very high. In order to limit this number preselection process is exploited. The first step in preselection process excludes very low probable patterns using information not included in the signal. For example recognized species rather can't be the voice of golden oriole in January and rather can't be the voice of house sparrow at midnight. Similarly the bird voice recorded in Poland in the forest far away from the river rather can't be the voice of kingfisher. Of course the rules excluding some species can be more sophisticated than that presented above.

Beside of the preselection based on the information not included in the signal there can be preselection based on the easy to calculate parameters included in the signal. These are usually parameters related to length of signal, spectral features and signal energy. In table 7 there are presented preselection quality parameters for signal parameter being simply the length of signal. The most important parameter is SP being preselection efficiency. The value of this parameter should be 100 % what means that for every recognized signal the list of preselected patterns includes at least one pattern belonging to the class of recognized signal. The rest of the parameters are also important but not so critical as the SP parameter.

### **3.3. Acoustical Bird Monitoring – State of the Art**

At the end of the article it is worthy to look at existing solutions for acoustical bird monitoring. Among presently existing bird monitoring systems, the most significant group are systems for bird conservation purposes [22, 23, 25, 32]. However systems constructed for protection of birds against wind turbines are also popular [21, 33]. There are also systems for protection of airports against large bird flocks endangering taking off airplanes [9].

Existing acoustical bird monitoring systems differ as for hardware and software construction. In hardware equipment the most important component is audio recorder. Usually this is one [22, 26] or two [32] microphone device which does not give capability to cope with overlapping signals. More complex solutions include microphone arrays [23] capable to separate voices of the particular individuals and to enhance acoustic signal quality. Maximal range of audio recorder is estimated on 250 m [25].

Processes of data acquisition and bird voices recognition are usually separated [24, 25, 32]. It means that data collection is accomplished by a standalone microprocessor or microcontroller device but acoustic signal analysis and recognition is performed by the stationary computer or notebook of the more powerful computing performance. However, solutions based on autonomous platforms like Raspberry Pi [22] or smartphone [32] have recently appeared.

Another hardware component is power supply. The majority of the systems use only battery supply [22]. Systems designed for long-term work are usually equipped with solar panel recharge device. Small wind turbines are not used because of noise generated by them.

Supplementary devices could be digital camera [5, 21], weather station [5, 33] and radar detector [21, 28, 31, 33] being additional source information supporting acoustical bird monitoring process. Hardware equipment is more and more often connected in sensor networks [28]. An interesting device is a balloon where the electronic equipment can be placed [29].

Software components of the bird monitoring acoustical system are basically: signal detector, feature extractor, classifier and optionally expert system.

Signal detector is usually based on simple energy threshold detection. However more advanced methods are also encountered. Interesting ap-

proach is presented in [34] where several detection methods depending on the kind of signal have been proposed. These methods rely on time-frequency spectral analysis. To some extent they allow overlapping signal detection. It seems that the most promising detection strategy is using microphone arrays for signal enhancement [23] together with prefiltration [19] and spectrogram analysis [34] in order to find the region of interest.

Among feature detection methods the MFCC one is the most popular [9, 13]. Good results have been also obtained by using similar HFCC features [15]. There also exist approaches extracting features directly from spectrograms [22]. Some principal component analysis of acoustic features is encountered too [30].

The most often encountered classification method are hidden Markov models HMM [9, 19, 26]. However this method has serious limitation because syntactic of bird songs and calls is not very well recognized. Similar method to HMM is GMM [9, 22] – also often used by researchers. Another methods include ANN [28], SVM [30] and DTW [15].

Summarizing all the consideration in this chapter, it can be stated that general system of bird voices recognition capable to recognize all the voices of birds species from a given geographic region does not exist. Such systems are rather complementary to the traditional point-count methods [27]. The most promising overall strategy of automatic bird voices recognition seems to include: microphone array signal separation, detection of region of interest from spectrogram, MFCC feature extraction and HMM or DTW classification. However in specific cases another strategy can be more efficient. In order to enhance recognition process it is worthy to use non-acoustic information like GPS position, time of the day, season, weather and so on. Nevertheless high efficiency bird voices recognition system still remains an open question.

## 4. Conclusion

General concept of the automatic acoustical avian monitoring system has been presented in the paper. There were also presented actual state of the work and results of the experiments tending to build such a system.

It can be concluded that it is possible to build automatic acoustical avian monitoring system which can make ornithological research easier. The system can be especially useful in determining presence or absence of the particular bird species in a given area. The system will be able to generate warnings about decrease or increase of bird species population. Moreover the system should be valuable tool for discovering cause of decreasing or increasing population and for discovering various phenomenas during ornithological research.

The most important tasks in the future include:

- integration of the prepared recognition procedures with database system
- evaluation of the recognition procedures integrated with database system on the larger set of recordings including about 90 bird species.
- evaluation of the database system on the gathered material
- terrain tests of the constructed audio recording device.
- continuing terrain expeditions in order to collect complete set of voices of bird species in Poland.

## Acknowledgements

This work has been partially cofunded from the Polish Ministry of Science and Higher Education grant no N N519 402934. The project was partially implemented in cooperation with Complex of Foothills Landscape Parks.

## References

1. Directive 2009/147/EC of the European Parliament and of the Council of 30 November 2009 on the conservation of wild birds.
2. Council Directive 92/43/EEC on the Conservation of natural habitats and of wild fauna and flora 1992.
3. C. Bibby, N. Burgess, D. Hill, S. Mustoe, *Bird Census Techniques*. Elsevier 2007.
4. A. Lisowska-Lis, R. Wielgat, D. Król, T. Potempa, *Acoustical Bird Monitoring System – Recordings Methodology and Species Chosen for Recordings*. 5th International Conference on Interdisciplinarity in Education 6-8 May 2010, Tallinn, Estonia.
5. D. Król, R. Wielgat, T. Potempa, A. Lisowska-Lis, *Acoustical Bird Monitoring System – Electronic Equipment*. 5th International Conference on Interdisciplinarity in Education 6-8 May 2010, Tallinn, Estonia.
6. T. Potempa, R. Wielgat, A. Lisowska-Lis, D. Król, *Acoustical Bird Monitoring System – Data Base Aided Signal Recognition*. 5th International Conference on Interdisciplinarity in Education 6-8 May 2010. Tallinn, Estonia.
7. H. Tyagi, R. M. Hegde, H. A. Murthy, A. Prabhakar *Automatic identification of bird calls using spectral ensemble average voiceprints*. Proceedings of the 13th European Signal Processing Conference (EUSIPCO '06), Florence, Italy, September 2006.
8. Ch.-H. Chou, Ch.-H. Lee, H.-W Ni, *Bird Species Recognition by Comparing the HMMs of the Syllables*. ICICIC, pp.143, Second International Conference on Innovative Computing, Information and Control (ICICIC 2007), 2007.
9. C. Kwan, K. Ho, *An Automated Acoustic System to Monitor and Classify Birds*. Bird Strike Committee Proceedings, 5th Joint Annual Meeting, Toronto, ONT, 2003.
10. J.-M. Valin, F. Michaud, J. Rouat, D. Létourneau, *Robust sound source localization using*

- a microphone array on a mobile robot. in Proceedings International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2003.
11. D. Król, On superiority of Successive Approximation Register over Sigma Delta AD converter in standard audio measurements using Maximum Length Sequences. International Conference on Signals and Electronic Systems, ICSES'08, 14-17 September 2008, Kraków, Poland.
  12. D. Król, Choice of analog-to-digital converters for audio measurements using MLS algorithm. 15th European Signal Processing Conference, EUSIPCO 2007, 3-7 September 2007, Poznań, Poland.
  13. D. Król, R. Wielgat, T. Potempa, P. Świętojański, Analysis of Ultrasonic Components in Voices of Chosen Bird Species, Forum Acusticum 2011, 26 June-1 July 2011, Aalborg, Denmark.
  14. <http://www.meteo.pl>
  15. R. Wielgat, T. P. Zieliński, T. Potempa, A. Lisowska-Lis and D. Król, *Signal Processing Algorithms, Architectures, Arrangements, and Applications*, 2007, 129-134.
  16. Ch.-H. Lee, Y.-K. Lee, R.-Z. Huang. *Journal of Information Technology and Applications*, 2006, **1**, 17-23.
  17. T. Potempa, R. Wielgat, D. Król, P. Koziół, A. Lisowska-Lis, *STUDIA INFORMATICA. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, seria INFORMATYKA*, 2010, **31 (2A)**, 375-391.
  18. <http://www.birdsmond.pwszta.edu.pl>
  19. R. Wielgat, T. Potempa, P. Świętojański and D. Król, "On using prefiltration in HMM-based bird species recognition", 2012 International Conference on Signals and Electronic Systems (ICSES), Wrocław, 2012, 1-5.
  20. T. Fawcett, *Pattern Recognition Letters*, 2006, **27**, 861-874.
  21. G. Mirzaei, M. M. Jamali, J. Ross, P. V. Gorsevski and V. P. Bingman, *IEEE Sensors Journal*, 2015, **15**, 6625-6632.
  22. C. wa Maina, D. Muchiri, P. Njoroge, *Biodiversity Data Journal*, 2016, **4**, e9906.
  23. D. T. Blumstein, D. J. Mennill, P. Clemins, L. Girod, K. Yao, G. Patricelli, J. L. Deppe, A. H. Krakauer, C. Clark, K. A. Cortopassi, S. F. Hanser, B. McCowan, A. M. Ali, A. N. G. Kirschel, *Journal of Applied Ecology*, 2011, **48**, 758-767.
  24. C. E. Sanders and D. J. Mennill, *Ornithological Applications*, 2016, **116**, 371-383.
  25. M. A. Pryde, T. C. Greene, *New Zealand Journal of Ecology*, 2016, **40**, 100-107.
  26. T. A. Mitchell et al. "Real-Time Bioacoustics Monitoring and Automated Species Identification" Ed. Xiaolei Huang. PeerJ 1 (2013): e103. PMC. Web. 10 Apr. 2017.
  27. E. C. Leach, C. J. Burwell, L. A. Ashton, D. N. Jones, R. L. Kitching, (2016) Comparison of point counts and automated acoustic monitoring: detecting birds in a rainforest biodiversity survey. *Emu* 116, 305-309.
  28. A. Boulmaiz, D. Messadeg, N. Doghmane, et al., *International Journal of Speech Technology*, 2016, **19**, 631-645.
  29. S. C. Prevost, Estimating Avian Populations with Passive Acoustic Technology and Song Behavior. Master's Thesis, University of Tennessee, 2016.
  30. J. Salamon, J. P. Bello, A. Farnsworth, M. Robbins, S. Keen, H. Klinck, et al., *PLoS ONE*, 2016, **11(11)**: e0166866.
  31. K.A. Williams, E.M. Adams, J. Fiely, D. Yates, P.B. Chilson, C. Kuster, D.C. Evers. 2013. Migratory Bird and Bat Monitoring in the Thousand Islands Region of New York State: Final Report, March 2013. Report to the U.S. Fish and Wildlife Service Columbus, Ohio Field Office. Report BRI 2013-11, Biodiversity Research Institute, Gorham, Maine.
  32. <https://www.wildlifeacoustics.com>
  33. <https://www.fws.gov/radar/acoustic>
  34. S. Duan, Automated species recognition in environmental recordings, PhD thesis, Queensland University of Technology, 2014.



# Fabrication, properties and cytotoxicity evaluation of degradable poly(trimethylene carbonate-co-lactide) for the use as nerve guidance channels

Paulina Bednarz<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>State Higher Vocational School in Tarnow, ul. Mickiewicza 8, 33-100 Tarnów, Poland

\*Corresponding author: p\_bednarz@pwsztar.edu.pl

---

## Abstract

Strategies to improve healing of damaged nerves include the application of specialized nerve guides, which hold the promise for allowing reanastomosis of the severed or damaged fibers. Studies have demonstrated that the use of a slowly degradable polymeric nerve guide can improve the nature and rate of nerve regeneration across a short gap in small nerves. The objective of this study was to characterize a biodegradable nerve guide based on poly(trimethylene carbonate-co-lactide) for peripheral nerve regeneration and to evaluate its cytotoxicity. The obtained copolymer films were incubated in two different media (distilled water and simulated body fluid), and while the degradation process appeared, pH and ion conductivity changes of solutions were monitored as well as mass loss of the samples. Additionally, mechanical tests (tensile strength, elongation at break and Young's modulus parameters) before and after different time points were carried out. To evaluate cytotoxicity biological test were done on fibroblasts cells (NIH 3T3). Cell metabolic activity was determined using Alamar Blue reagent and their morphology was observed under fluorescence microscopy. The growth of pH in both media were mostly caused by steadily degradation of carbonate units into alkaline diols. The growth of ion conductivity value at the beginning of the incubation process was associated with the releasing of free ions to the solution. The mechanical parameters decreased with the progress of degradation process. Ringer's fluid, as more aggressive, caused higher decrease in mechanical properties. The measured contact angles showed good surface wettability. Both surfaces, the top and the bottom, had similar hydrophilicity. Moreover, activity of fibroblasts cells were similar on both sides as well as on the reference TCPS. Good adhesion of NIH 3T3 cells to the surface suggests that the hydrophilic polymers promote colonization of fibroblasts cells on their surface. Biological studies have shown that used cells are very sensitive to surface topography which they colonize and cell viability was higher at the bottom surface, which has a slightly higher average roughness  $R_a$ . Thus, fibroblasts cell preferred colonizing rougher than smoother surfaces. Fabricated films does not affect negatively, namely, toxic on cell cultures and forms substrate with favourable surface properties. This was confirmed by the Alamar Blue tests and microscopic observations.

**Key words:** peripheral nerve regeneration, degradable polymer, PTMC/PLA, contact angle, roughness, morphology, viability, fibroblasts

---

## Introduction

The current clinical method for treatment of nerve gap is reconstruction with the use of autologous nerve grafts. However, autografting is limited by the availability of expendable donors nerve and donor site morbidity [1]. An alternative repair method is tubulization, which involves enclosure of the end of severed nerve by a tube which holds the stumps in correct place, offers a guide to regenerating axons to distal stump and may concentrate neurotrophic products from nerve stumps [2, 3]. The use of synthetic conduits as nerve guides to bridge missing tissue has provided an excellent *in vivo* experimental model to study peripheral nerve regeneration process. Of five channels approved by Food and Drug Administration (FDA), four are based on degradable polymers and of these, two are composed of collagen and two are synthetic, composed of poly(glycolic acid) [4] and poly(lactide-co-caprolactone) [3, 5-9]. Biodegradable nerve tubes are advantageous over their non-degradable ones, obviating the need for their removal when regeneration is completed. These temporary conduits have been mostly based on aliphatic polyesters including poly(glycolic acid) [10-12], poly(lactid-co-glicolid acid) [13-17], poly(DL-lactic acid) [18-20] and poly(lactic acid-co-ε-caprolactone) [5,21]. The aforementioned group have disadvantage of not only being stiff and brittle materials but also of possessing a relatively high rate of degradation. Additionally, high degrees of swelling are observed at late stage of degradation [22, 23]. In view of desired properties of synthetic tubes, copolymers of trimethylene carbonate (TMC) and lactides are suitable candidate for designing peripheral nerve implants, as both polymers undergo slow degradation *in vivo* to non-toxic products [24,25]. Poly(trimethylene carbonate) (PTMC) belongs to the family of poly(alkylene carbonate)s and is obtained through polymerization of its cyclic monomer, trimethylene carbonate. It is a linear, amorphous polymer

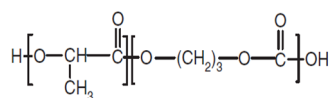
with glass transition of approximately -15 °C. At room temperature it is a rubbery, flexible material [26-30]. PTMC seems to be an interesting candidate to introduce modifications to rigid PLLA [31-34]. Poly(L-lactic acid) (PLLA) is a well-known polymer that has been studied extensively for various biomedical applications owing to its acceptable biocompatibility and inherent biodegradability. PLLA, an example of aliphatic polyesters commonly made from α-hydroxy acids is a thermoplastic, high-strength and high-modulus polymer. The rate of degradation of PLLA depends on factors such as its initial molecular weight, purity, crystalline morphology, the isomer ratio and external dimensions of a device [35-40].

The aim of this study was to investigate the influence of poly(trimethylene carbonate-co-lactide)'s degradation process in two different incubation liquids on mechanical properties as well as to evaluate cytotoxicity of PTMC-PLA and to assess the influence of surface parameters of the PTMC/PLA on fibroblasts adhesion and proliferation.

## Materials and Methods

### Materials

A copolymer of trimethylene carbonate and L-lactide (PTMC-PLA, 85:15) was purchased from BiomatPol (Poland) and its chemical structure is presented in Fig. 1. It was synthesized by ring opening polymerization of L-lactide and 1,3-trimethylene carbonate, in the presence of low-toxic initiator  $Zr(acac)_4$  – at a molar ratio of  $1.25 \times 10^{-3}$  at 100 °C by a conventional method using a vacuum line for degassing and sealing of the ampoules.



**Figure 1.** Chemical structure of copolymer PTMC-PLA

## Preparation

Films were prepared by dissolving PTMC-PLA polymer in dimethylformamide to obtain a 10 wt. % solution. The solution was stirred with magnetic stirrer for at least 48h at ambient temperature and then cast on glass Petri dishes. The films were dried under vacuum for 48 hours. For biological evaluation the films were sterilised with the use of the H<sub>2</sub>O<sub>2</sub> cold plasma technique (Sterrad, ASP, J&J, USA).

## In vitro degradation

For each degradation studies PTMC-PLA samples were placed in small flasks filled with distilled water or Ringer's fluid. The flasks stood in the thermostatic oven at 37°C for specified period of time. After preterminated time of incubation samples were removed from the solution and dried under vacuum. The ratio of samples' mass to incubation medium for every flask was constant. The hydrolytic degradation process was observed by pH, conductivity and mass loss changes. The measurements were carried out with pH-meter/conductometer CPC-411 (Elmetron, Poland) and mass loss were done using balance WAS 220/C/2 (Radwag, Poland) according to formula 1. Subsequently samples were evaluated by several physicochemical methods.

$$\Delta m = \frac{m_0 - m_1}{m_0} \times 100\% \quad (1)$$

where:

$\Delta m$  - mass loss [%]

$m_1$  - residual mass of sample [g]

$m_0$  - initial mass of sample [g]

## Determination of physicochemical properties of PTMC-PLA

The water contact angle of obtained PTMC-PLA films was measured using sessile drop method on Drop Shape Analysis System (DSA Mk2, Krüss, Germany). Ten measurements on the film were ac-

complished. The data presented are average of ten measurements ( $\pm$  standard deviation).

Prior to taking roughness measurements a glass slide with the thin PTMC-PLA films was fixed onto a mount with double-sided adhesive tape to prevent the samples from moving during the test. Roughness was measured with using a profilometer (Hommelwerke, Germany), equipped with cone shaped diamond tip (radius of 5  $\mu\text{m}$ ) and the velocity of moving cone was 0,50 mm/s. Each sample was measured ten times on both sides. The parameters calculated were surface average roughness ( $R_a$ ). All the given values are presented as average of ten measurements ( $\pm$  standard deviation).

Tensile strengths (TS), Young's moduli (E) and elongation at break ( $\epsilon$ ) of samples (70x5) were measured using a universal testing machine (Zwick 1465, Germany) equipped with 1kN load cell. The sample length between the clamps was 45 mm and clamps' speed was 50 mm/min. The obtained results correspond to the average of six measurements ( $\pm$  standard deviation).

## Determination of biological properties of PTMC-PLA

The sterilized films were placed in 24-well plate (Nunclon, Denmark), both surfaces of the films (top surface, i.g. air-cured, and bottom surface, i.g. glass-cured) were tested and as a control the bottom of the well tissue culture polystyrene-TCPS was used. NIH 3T3 mouse embryonic fibroblast cells were cultured on the studied materials in EMEM (Eagle's minimal essential medium) cell culture medium (PAN Biotech, Germany) supplemented with 10% FBS, 1% penicillin/streptomycin and 0.1% amino acids and sodium pyruvate (PAA, Germany) at 37°C under a humidified atmosphere with 5.0% CO<sub>2</sub> for 24 hours, 4 and 7 days. Initial cell density was  $2.5 \times 10^4$  cells per well.

Cell metabolic activity was evaluated using Alamar Blue reagent (In Vitro Toxicology Assay Kit, Resazurin based). 0.1 ml Alamar Blue rea-

gent was added and the cells were incubated for 4 h at 37°C. Reduction of Alamar Blue was measured fluorescently (excitation wavelength 530 nm, emission wavelength 590 nm) (FLUOstar Omega, BMG labtech) and calculated according to the following formula:

$$\%Reduction\ of\ Alamar\ Blue = \frac{S^x - S^{control}}{S^{100\%reduced} - S^{control}} \cdot 100\% \quad (2)$$

where:

$S^x$  – fluorescence of samples

$S^{control}$  – fluorescence of medium without cells

$S^{100\%reduced}$  – fluorescence of reagent reduced in 100%

The result of this measurement is the reduction ratio of the reagent (the higher the reduction, the more cells).

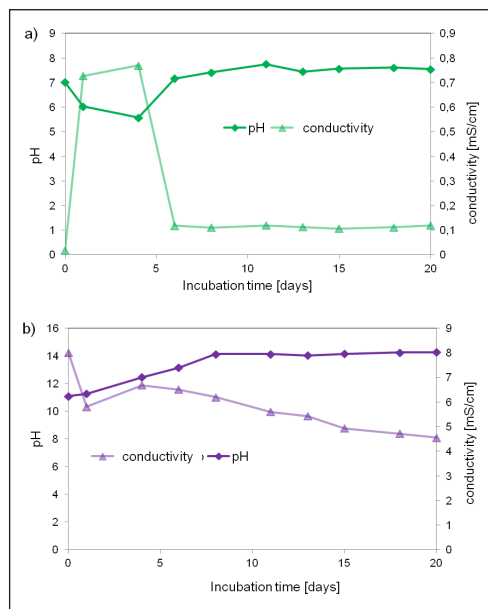
The results were expressed as mean and standard error of the mean from three independent samples. Statistical significance was evaluated according to t-test.

Morphology of the cells was observed under fluorescence microscopy (Zeiss Axiovert, Carl Zeiss, Germany). The cultured cells were fixed in 4% paraformaldehyde for 1 h, then washed in PBS and stained with acridine orange solution (1 mg/mL) to visualize the nucleic acids.

## Results and Discussion

In order to design a suitable system for the preparation of nerve guidance channels to be used in regeneration of nerve gaps many limitations are imposed. Namely, slow degradation *in vivo*, low degree of swelling after implantation and no or low crystallinity. Moreover, implant should be flexible and tough to allow the handling in microsurgery. Therefore, polymer system should meet several requirements in terms of mechanical performance, suitable surface properties enhancing cells activity, degradation behavior and lack of cytotoxicity.

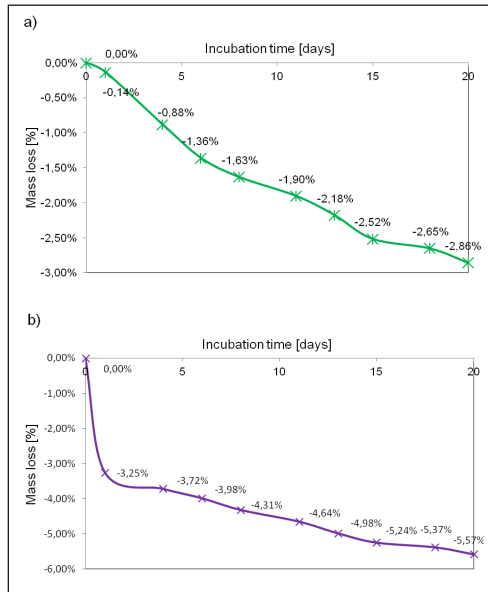
The degradation kinetics of neural guidance should match the rate of nerve regeneration. Too rapidly occurring degradation may result in failing to protect regenerated axons and too slow degradation rate may lead to compression and foreign body reaction. Degradation process play crucial role in nerve regeneration and thus it was investigated in both distilled water and Ringer's fluid, presented in figure 2.



**Figure 2.** Solution values of pH and conductivity of PTMC-PLA films incubated in a) distilled water and b) Ringer's fluid

It is clearly visible that at first pH of PTMC-PLA films incubated in distilled water decreased to 5.58, suggesting that lactide units (PLA) decomposes to oligomers and lactic acid faster than carbonate units (PTMC). However, after a 4 day pH increased with single slight fall. Further increase might result from degradation of PTMC units, which decomposed to alkaline products i.e. 1,3-propanediol. The ionic conductivity was in invert proportion to pH changes. In the initial step of incubation it rapidly increased to approx. 0.73mS/cm, which was connected with releasing of free ions to the solution and after 4 day main-

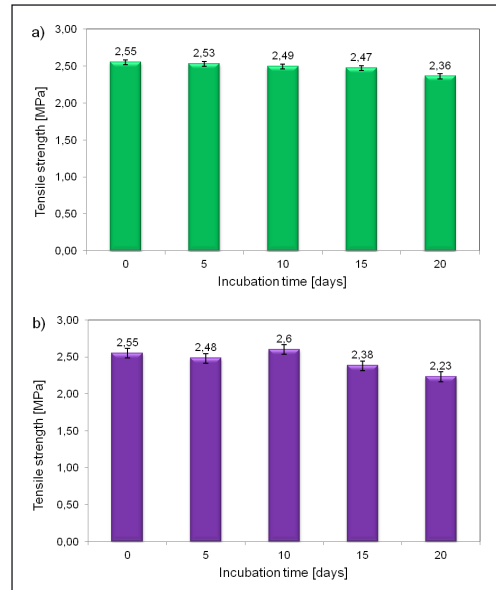
tained almost constant at 0.12 mS/cm. Unlike the samples' degradation in water environment, films incubated in Ringer's fluid showed no decrease of pH in first step of degradation, presented in figure 2b. The pH values increased gradually, which was due to constant decomposition of TMC units to alkaline products. Figure 3 presents the mass loss during incubation in both distilled water and Ringer's fluid. The PTMC-PLA samples lost their weight steadily without the significant changes and finally reached 2.86%. Whereas films incubated in Ringer's fluid showed higher rate of degradation process and amounted to 5.57%.



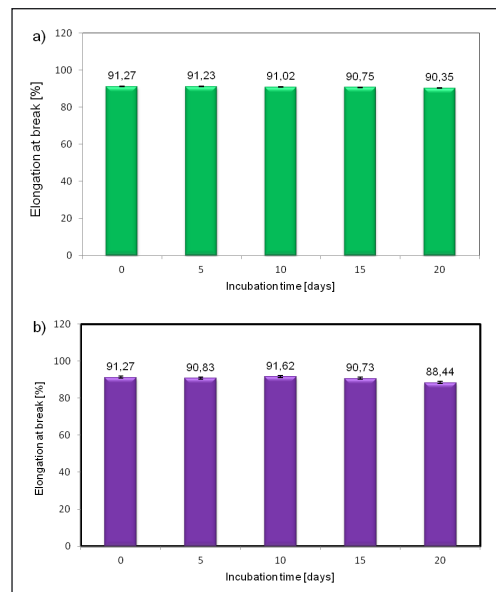
**Figure 3.** Mass loss of PTMC-PLA films incubated in a) distilled water and b) Ringer's fluid

During nerve regeneration, peripheral nerve implants should have the capacity to withstand mechanical stress from neighbouring tissues and maintain at least slight elasticity and bendability without collapsing or losing their shape. Thus, knowledge how materials lose their mechanical properties after implantation seems to be essential. The tensile strength, elongation at break and Young's modulus of PTMC-PLA films as a function of *in vitro* degradation are presented

in Figures 4-6, respectively. Tensile strength of PTMC-PLA copolymer was 2.55 MPa, elongation at break was 91.28%, what proved that obtained polymers is very soft and flexible. The Young's modulus was 9.78 MPa.

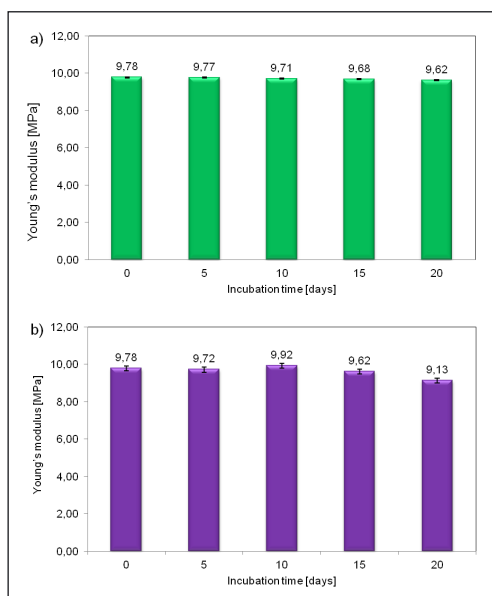


**Figure 4.** Tensile strength of PTMC-PLA films incubated in a) distilled water and b) Ringer's fluid



**Figure 5.** Elongation at break of PTMC-PLA films incubated in a) distilled water and b) Ringer's fluid

During incubation in distilled water tensile strength constantly decreased and after 20 days reached 2.36 MPa. However, the tensile strength of films incubated in Ringer's fluid initially decreased, then increased and decreased again till the end of measurement and was 2.23 MPa. This reinforcement effect during *in vitro* degradation may be caused by swelling of the PLA units [41]. The elongation at break in both liquids slightly decreased but still remains relatively high to maintain the shape of the implant without collapsing.



**Figure 6.** Young's modulus of PTMC-PLA films incubated in a) distilled water and b) Ringer's fluid

The Young's modulus of PTMC-PLA films incubated both in distilled water and Ringer's fluid decreased, however, terminal value was a little bit lower in Ringer's fluid. The loss of the values is directly connected with random scission of the ester backbone of PTMC-PLA leading to a noticeable reduction of mechanical properties, despite the low rate of degradation of PTMC-PLA copolymer.

Surface properties are dominating factor in affecting the interaction between neural scaffold and neural cells. The surface hydrophobicity is

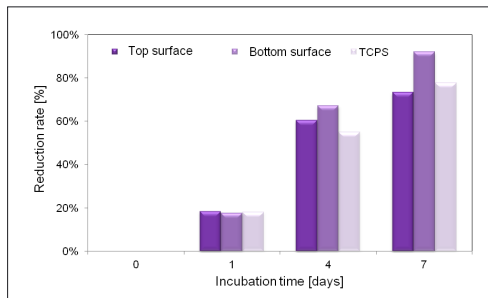
well known as a key factor to govern cell response. The lower the contact angle, the more hydrophilic the surface is. It is well known that both highly hydrophilic and highly hydrophobic surfaces are not favorable for cell attachment. Surfaces with moderate wettability are able to adsorb proper amounts of adhesive proteins and at the same time enable to preserve their natural conformations, what stimulates positive cell response [42] cellular and protein levels to biomaterials is, in most cases, closely associated with the materials' surface properties. In tissue engineering, regenerative medicine and many other biomedical fields, surface engineering of the bio-inert synthetic polymers is often required to introduce bioactive species that can promote cell adhesion, proliferation, viability and enhanced ECM-secretion functions. Up to present, a large number of surface engineering techniques for improving biocompatibility have been well established, the work of which generally contains three main steps: [1]. Material surface roughness (or topography) is another important factor influencing cell adhesion and behavior. Indeed, roughness modulates the biological response of tissues in contact with the implant. Material surface roughness has a direct influence *in vitro* as well as *in vivo* on cellular morphology and proliferation [43, 44]. The data from contact angle and profilometry measurements of PU/PLA blend are listed in Table 1. It can be concluded that PTMC-PLA film has smooth surface on both sides and no significant irregularities cannot be noticed. The upper surface of the polymer film is slightly less rough than the lower. The average level of roughness  $R_a$  of the top surface was 1.35  $\mu\text{m}$ , whereas the bottom was 1.71  $\mu\text{m}$ .

Examined surface of PTMC-PLA film has good surface wettability – the value of the contact angle below 90°. The top surface of the film is slightly more hydrophilic ( $\theta = 68.3$ ) of the lower surface ( $\theta = 70.1$ ). The Alamar Blue test was evaluate viability of fibroblasts on PTMC-PLA films, presented in Figure 7. One can notice that there are no sig-

**Table 1.** Water contact angle ( $\theta$ ) and roughness ( $R_a$ ) of top and bottom surface of PTMC-PLA films

	$\theta$ [°]	$R_a$ [ $\mu\text{m}$ ]
<b>TOP</b>	$68.3 \pm 5.9$	$1.35 \pm 0.23$
<b>BOTTOM</b>	$70.1 \pm 4.1$	$1.71 \pm 0.17$

nificant differences after 24 h of culture and cell number is very similar for the top and the bottom surfaces of samples as well as for TCPS. It seems that in this case cell attachment and adhesion are independent on material surface properties. After 4 and 7 days, the cells number increased and was significant higher than on the control TCPS. However, the cell number on the top surface is slightly lower than on the bottom surface. It may indicate that fibroblasts adhere and proliferate more favourably on more hydrophilic and rougher surface.

**Figure 7.** Reduction rate of fibroblasts cells on top surface and bottom surface of PTMC-PLA films and TCPS as a control after 24 h, 4 and 7 days

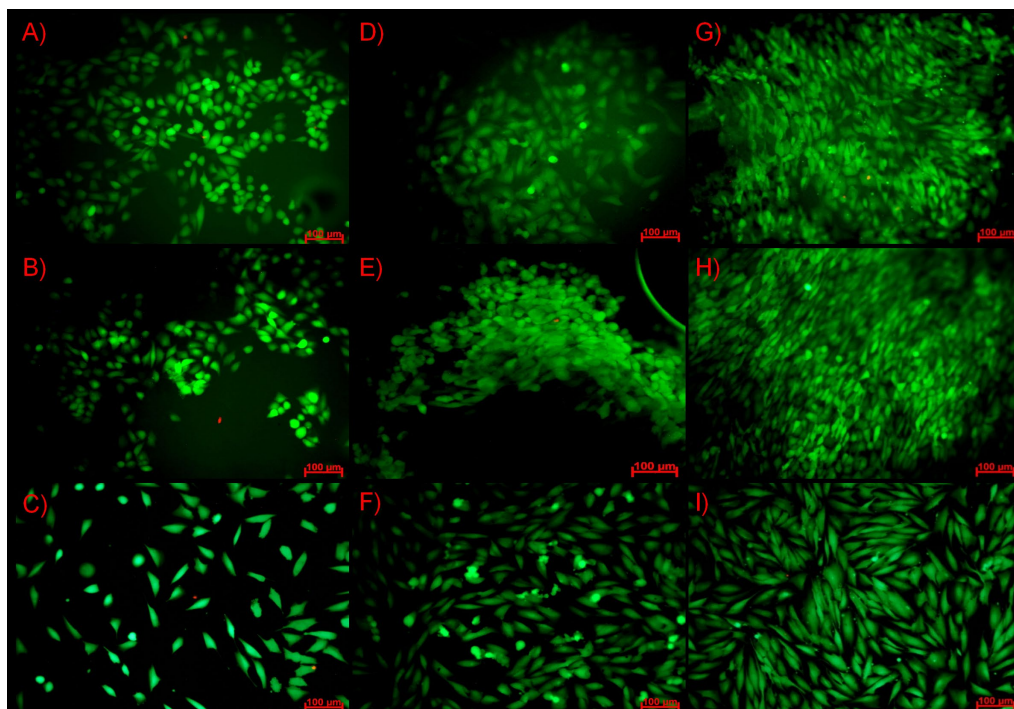
Morphology and distribution of NIH 3T3 cells cultured on both surfaces (top and bottom) of the PTMC-PLA films as well as on the reference TCPS are presented in Figure 8. The fluorescence images showing live (green) and red (dead) cells correspond to the results of cell viability evaluated by Alamar Blue test.

On the bottom surface the single dead cell was observed after 24 h of culture. Adhered cells to the surface of PLLA-TMC showed normal morphology, but different from the morphology of the cells on TCPS. Fibroblasts on TCPS are well spread,

polygonal or spindle-shaped, what indicated that they were in resting state. While the majority of the cells on PTMC-PLA were irregular-shaped, round or oval, which confirmed that they were in active state. Moreover, part of the fibroblasts had a cubic shape, which showed that they were in the time of full activity.

## Conclusions

The aim of this work was to examine how the degradation process affects the mechanical and surface properties of the copolymer of trimethylene carbonate and lactic acid in the light of biomedical applications. The copolymer undergoes hydrolytic degradation very slowly. Although, polylactides degrade via bulk erosion mechanism by the random scission of the ester backbone into lactic acid a normal human metabolic by-product, which is broken down into water and carbon dioxide via citric acid cycle. Enzymes role in the degradation process still is not fully explained. However, it is known that activity of enzymes is meaningless when the polymer is in its glassy state, but takes an important part when polymer is in elastic state. Thus, poly(trimethylene carbonate), which undergoes surface degradation with the rate of *in vivo* degradation was found to be much higher than *in vitro* degradation. This is presumably due to the contribution of *in vivo* enzymatic degradation process. The degradation *in vitro* test showed that the mass loss of samples incubated in simulated body fluid was higher than in distilled water. Therefore, Ringer's fluid turned out to be more aggressive environment for PTMC-PLA films. The pH changes in both media were mostly



**Figure 8.** Morphology of NIH 3T3 cells cultured on the PTMC-PLA films: top surface (A, D, G), bottom surface (B, E, H) and reference samples TCPS (C, F, I) after 24 h (A ÷ C), after 4 days (D ÷ F) and 7 days (G ÷ I); fluorescence staining acridine orange, evaluation under fluorescence microscope, bar 100  $\mu\text{m}$

caused by steadily degradation of carbonate units into alkaline diols. The growth of ion conductivity value at the beginning of the incubation process was associated with the releasing of free ions to the solution. The mechanical parameters, namely, tensile strength, elongation at break and Young's modulus decreased with the progress of degradation process. The reduction of the mechanical properties resulted from the course of degradation and it was noticeable for samples incubated both in distilled water and in simulated biological environment. Ringer's fluid, as more aggressive, caused a higher decrease in mechanical properties. The measured contact angles showed good surface wettability. Both surfaces, the top and the bottom, have similar hydrophilicity. Moreover, activity of fibroblasts cells were similar on both sides as well as on the reference TCPS. Good adhesion of NIH 3T3 cells to the surface suggests that the

hydrophilic polymers promote colonization of fibroblasts cells on their surface. Biological studies have shown that used cells are very sensitive to surface topography which they colonize and cell viability was higher at the bottom surface, which has a slightly higher average roughness  $R_a$ . Thus, fibroblasts cell preferred colonizing rougher than smoother surfaces. Fabricated films does not affect negatively, namely, toxic on cell cultures and form substrate with favourable surface properties. This was confirmed by the Alamar Blue tests and microscopic observations.

## References

1. A. Faroni, S. A. Mobasseri, P. J. Kingham and A. J. Reid, *Adv. Drug Deliv. Rev.*, 2015, 82, 160-167.
2. A. M. Moore, R. Kasukurthi, C. K. Magill, H.



- F. Farhadi, G. H. Borschel and S. E. Mackinnon, *HAND*, 2009, 4, 180-186.
3. S. E. Mackinnon and A. L. Dellon, *Plast. Reconstr. Surg.*, 1990, 85, 419-24.
4. G. R. Evans, *Anat. Rec.*, 2001, 263, 396-404.
5. M. F. Meek, K. Jansen, R. Steendam, W. van Oeveren, P. B. van Wachem and M. J. a van Luyn, *J. Biomed. Mater. Res. A*, 2004, 68, 43-51.
6. A. Berger, F. Lassner and E. Schaller, *Handchir. Mikrochir. Plast. Chir.*, 1994, 26, 44-7.
7. W. A. Crawley and A. L. Dellon, *Plast. Reconstr. Surg.*, 1992, 90, 300-2.
8. J. Kim and A. L. Dellon, *J. Foot Ankle Surg.*, 2001, 40, 318-23.
9. M. F. Meek and J. H. Coert, *J. Reconstr. Microsurg.*, 2002, 18, 97-109.
10. K. Matsumoto, K. Ohnishi, T. Kiyotani, T. Sekine, H. Ueda, T. Nakamura, K. Endo and Y. Shimizu, *Brain Res.*, 2000, 868, 315-328.
11. T. Nakamura, Y. Inada, S. Fukuda, M. Yoshitani, A. Nakada, S. I. Itoi, S. I. Kanemaru, K. Endo and Y. Shimizu, *Brain Res.*, 2004, 1027, 18-29.
12. T. Kiyotani, M. Teramachi, Y. Takimoto, T. Nakamura, Y. Shimizu and K. Endo, *Brain Res.*, 1996, 740, 66-74.
13. S. C. Park, S. H. Oh, T. B. Seo, U. Namgung, J. M. Kim and J. H. Lee, *J. Biomed. Mater. Res. – Part B Appl. Biomater.*, 2010, 94, 359-366.
14. X. Wen and P. A. Tresco, *Biomaterials*, 2006, 27, 3800-3809.
15. R. Sasaki, S. Aoki, M. Yamato, H. Uchiyama, K. Wada, H. Ogiuchi, T. Okano and T. Ando, *J. Tissue Eng. Regen. Med.*, 2011, 5, 823-830.
16. S. H. Oh and J. H. Lee, *J. Biomed. Mater. Res. Part A*, 2007, 80A, 530-538.
17. A. L. Luis, J. M. Rodrigues, S. Amado, A. P. Velloso, P. A. S. Armada-Da-silva, S. Raimondo, F. Fregnan, A. J. Ferreira, M. A. Lopes, J. D. Santos, S. Geuna, A. S. P. Varejão and A. C. Maurício, *Microsurgery*, 2007, 27, 125-137.
18. S. Hsu and H.-C. Ni, *Tissue Eng. Part A*, 2009, 15, 1381-1390.
19. V. Maquet, D. Martin, B. Malgrange, R. Franzen, J. Schoenen, G. Moonen and R. Jereme, *J. Biomed. Mater. Res.*, 2000, 52, 639-651.
20. H. Steuer, R. Fadale, E. Müller, H.-W. Müller, H. Planck and B. Schlosshauer, *Biohybride nerve guide for regeneration: degradable polylactide fibers coated with rat Schwann cells*, 1999, vol. 277.
21. F. J. Rodríguez, N. Gómez, G. Perego and X. Navarro, *Biomaterials*, 1999, 20, 1489-1500.
22. M. Vert, S. M. Li, G. Spenlehauer and P. Guerin, *J. Mater. Sci. Mater. Med.*, 1992, 3, 432-446.
23. and A. G. M. Lu, Lichun, Charles A. Garcia, *J. Biomed. Mater. Res.*, 1999, 46, 236-244.
24. A. R. Katz, D. P. Mukherjee, A. L. Kaganov and S. Gordon, *Surg. Gynecol. Obstet.*, 1985, 161, 213-22.
25. C. G. Pitt, M. Chasin, A. Domb, E. Ron, E. Mathiowitz, R. Langer, K. Leong, C. Laurencin, H. Brem and S. Grossman, *Biodegrad. Polym. as Drug Deliv. Syst.*, 1990, 71-120.
26. A. P. Pêgo, M. J. A. Van Luyn, L. A. Brouwer, P. B. van Wachem, A. A. Poot, D. W. Grijpma and J. Feijen, *J. Biomed. Mater. Res.*, 2003, 67A, 1044-1054.
27. A. P. Pêgo, A. A. Poot, D. W. Grijpma and J. Feijen, *Macromol. Biosci.*, 2002, 2, 411-419.
28. Z. Zhang, R. Kuijer, S. K. Bulstra, D. W. Grijpma and J. Feijen, *Biomaterials*, 2006, 27, 1741-1748.
29. A.-C. Albertsson and M. Eklund, *J. Appl. Polym. Sci.*, 1995, 57, 87-103.
30. K. J. Zhu, R. W. Hendren, K. Jensen and C. G. Pitt, *Macromolecules*, 24, 1736-1740.
31. T. Tyson, A. Finne-Wistrand and A.-C. Albertsson, *Biomacromolecules*, 2009, 10, 149-154.
32. Y. Qin, M. Yuan, L. Li, S. Guo, M. Yuan, W. Li and J. Xue, *J. Biomed. Mater. Res. Part B Appl. Biomater.*, 2006, 79B, 312-319.
33. Z. Zhang, D. W. Grijpma and J. Feijen, *Macromol. Chem. Phys.*, 2004, 205, 867-875.
34. A. P. Pêgo, A. A. Poot, D. W. Grijpma and J. Feijen, *J. Mater. Sci. Mater. Med.*, 2003, 14, 767-773.

35. H. Tian, Z. Tang, X. Zhuang, X. Chen and X. Jing, *Prog. Polym. Sci.*, 2012, 37, 237-280.
36. A. Södergård and M. Stolt, *Prog. Polym. Sci.*, 2002, 27, 1123-1163.
37. L. S. Nair and C. T. Laurencin, *Prog. Polym. Sci.*, 2007, 32, 762-798.
38. A. P. Gupta and V. Kumar, *Eur. Polym. J.*, 2007, 43, 4053-4074.
39. N. Murthy, S. Wilson and J. C. Sy, *Polym. Sci. A Compr. Ref. 10 Vol. Set*, 2012, 9, 547-560.
40. S. Wang and L. Cai, *Int. J. Polym. Sci.*, 2010, 2010.
41. H. K. Moon, Y. S. Choi, J. K. Lee, C. S. Ha, W. K. Lee and J. A. Gardella, *Langmuir*, 2009, 25, 4478-4483.
42. Z. Ma, Z. Mao and C. Gao, *Colloids Surfaces B Biointerfaces*, 2007, 60, 137-157.
43. H.-I. Chang and Y. Wang, *Regen. Med. Tissue Eng. – Cells Biomater.*, 2011, 569-588.
44. A. Khalili and M. Ahmad, *Int. J. Mol. Sci.*, 2015, 16, 18149-18184.

# Mathematical contests as seen by participants

Jerzy Szczepański\*

*State Higher Vocational School in Tarnow, ul. Mickiewicza 8, 33-100 Tarnów, Poland*

\*Corresponding author: Jerzy.Szczepanski@gmail.com

---

## Abstract

Motivation to take part in mathematical competitions and sources of information concerning the competitions is analysed on a basis of a questionnaire presented to a group of students.

**Key words:** Identification, motivation and support of mathematical talents, mathematical competitions, mathematical education

---

## Introduction

One of possible ways (and certainly not the only one) of identifying talented students are mathematical competitions. What do young people think of mathematical contests? Why do they enter mathematical challenges? Who primarily encourages, motivates and supports young people? Are female participants motivated by different factors than their male colleagues? We try to answer the questions. We conclude that old fashioned methods of informing on contests as printed materials, posters or newspaper announcements and even the omnipresent Internet are less effective as a source of information than teachers at school who encourage, motivate and support young talented people.

## Materials and Methods

A group of about thirty students of mathematics at the State Higher Vocational School in Tarnów was asked in January 2016 if they participated in mathematical competitions in their middle school (junior high school at age 13 to 16 years) or high school (at age from 16 to 19 years) and what motivated them to start in contests. Their answers served to construct a questionnaire presented in autumn 2016 to a group of 65 students: 21 students (15 female, 6 male) at the State Higher Vocational School in Tarnów, all studying mathematics, and 44 students at the Jagiellonian University in Kraków, 28 studying mathematics (15 female, 13 male) and 16 studying biophysics (8 female, 8 male). We may consider the group of the respondents uniformly distributed between 2012 and 2016 as the graduation year is considered.

**Table 1.** Graduation year of respondents

graduation year	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	total
number of respondents	2	2	12	14	11	13	11	65

## Results and Discussion

The large advantage of the selected group of respondents was the completion of their high school education only a few years or even just months prior answering the questionnaire. The fresh perspective seems adequate for answering questions about participation in mathematical competitions (Table 2).

It is evident and not surprising that the most popular are the international competition Mathematical Kangaroo, which has been taking place in Poland since 1992, and other mathematical competitions organized by teachers in middle and high schools. Much smaller number of participants are attracted by the Polish Junior Mathematical Olympiad (for middle school students aged 13-16

**Table 2.** The number of respondents (in the group of 65 students, including 38 women and 27 men) who have participated in various mathematical competitions in middle and high school

Type of mathematical competitions	middle school (13-16 years)			high school (16-19 years)		
	all	female	male	all	female	male
International Mathematical Kangaroo	42	25	17	22	11	11
Polish Junior Mathematical Olympiad (13-16 years) or Polish Mathematical Olympiad (16-19 years)	8	4	4	9	3	6
A competition organised by a local Board of Education	24	13	11	6	2	4
Competitions organised by respondent's school	33	17	16	26	14	12
Other competitions	8	5	3	6	6	3
'I haven't participated in mathematical competitions'	11	6	5	26	17	9

**Table 3.** Number of mathematical competitions entered by respondents

Number of entered competitions	middle school (13-16 years)			high school (16-19 years)		
	all	female	male	all	female	male
none	11	6	5	26	17	9
one	17	12	5	21	11	10
two	19	13	6	8	6	2
three	14	4	10	6	3	3
four	2	1	1	3	1	2
five or more	2	2	0	1	0	1
total number of the respondents	65	38	27	65	38	27
mean	1.77	1.68	1.89	1.11	0.95	1.33
median	2	2	2	1	1	1
standard deviation	1.00	0.96	1.03	0.96	0.85	1.14

years) and the Polish Mathematical Olympiad (for high school students). Entering the Mathematical Olympiad requires not only the mathematical abilities of the participants but also a special training under teacher’s direction for a long time preceding the competition.

Several respondents in the group entered more than one mathematical competitions (Table 3).

The next table (Table 4) shows the above data divided into three groups of respondents labelled as ‘SHVS maths’ (21 students of mathematics at the State Higher Vocational School, Tarnów), ‘JU maths’ (28 students of mathematics at the Jagiellonian University, Kraków), ‘JU bio’ (16 students of biophysics at the Jagiellonian University, Kraków) and ‘all resp.’ (all 65 respondents):

It is easily seen that the median of the number of different mathematical competitions entered by a respondent is higher in middle school (mean=1.77, median=2) than a few years later in high school (mean=1.11, median=1), which is understandable. The higher the level of the competition is, the more work is requested from the participants. Since high school students didn’t have time to compete in several contests simultaneously they had to reduce the number of entered competitions.

One may use a standard Pearson’s chi-squared test (see eg. [2, 3]) and check the hypothesis that the number of entered competition has Poisson distribution with the parameter  $\lambda$  equal to the sample mean versus the hypothesis that the distribution is different (Table 5).

**Table 4.**

number of respondents who entered	middle school (13-16 years)				high school (16-19 years)			
	SHVS maths	JU maths	JU bio	all resp.	SHVS maths	JU maths	JU bio	all resp.
none competition	2	4	5	11	7	8	11	26
one competition	8	5	4	17	10	10	1	21
two competitions	8	8	3	19	3	3	2	8
three competitions	3	7	4	14	0	4	2	6
four competitions	0	2	0	2	1	2	0	3
five or more	0	2	0	2	0	1	0	1
total number of respondents	21	28	16	65	21	28	16	65
mean	1.57	2.14	1.38	1.77	0.95	1.46	0.69	1.11
median	2	2	1	2	1	1	0	1
standard deviation	0.73	1.10	1.05	1.00	0.63	1.17	0.95	0.96

**Table 5.**

	middle school (13-16 years)			high school (16-19 years)		
	all	female	male	all	female	Male
$\lambda$	1.77	1.68	1.89	1.11	0.95	1.33
p-value	75.5%	46.7%	27.5%	7.8%	43.6%	11.1%

Although the sample median in the group of all respondents is the same as the median in the group of male or female respondents, the distributions of the number of competitions entered by one respondent in the two disjoint groups is different. Let  $F_{\text{male}}$  and  $F_{\text{female}}$  denote the cumulative distribution function of the sample of male and female respondents, respectively. The Wald-Wolfowitz runs test [2] of the hypothesis

$H_0$ :  $F_{\text{male}}$  and  $F_{\text{female}}$  are identical

vs.

$H_1$ :  $F_{\text{male}}$  and  $F_{\text{female}}$  are different

shows that hypothesis  $H_0$  fails in both cases. The number of runs is only 11 and 10, which give insignificant p-values smaller than  $10^{-6}$ . If we restrict ourselves to the three smaller subgroups of respondents ‘SHVS maths’, ‘JU maths’ and ‘JU bio’ and fix the significance level of the Wald-Wolfowitz runs test equal 0.05, the hypothesis  $H_0$  is to be rejected (or not) as it is shown below (Table 6).

The second part of the questionnaire contained the assessment of motivation and the availability of sources of information on contests, expressed by the respondents in the five-point scale: 5: ‘definitely yes’, 4: ‘rather yes’, 3: ‘hard to say’, 2: ‘rather no’, 1: ‘strongly no’. Table 7 contains the medians of the answers in the group of all respondents (65

students), female and male respondents (38 and 27 students, respectively), SHVS students of mathematics (21 persons), JU students of mathematics (28 persons) and JU students of biophysics (16 persons), arranged in descending order with respect to the sum of medians in each row (Table 7).

It is easy to see that there is virtually no difference in the ordering of the motivation to take the competition between the disjoint groups of female and male respondents or between the disjoint groups of JU students of mathematics, JU students of biophysics or SHVS of mathematics, which are almost the same as in the group of all respondents.

## Conclusions

The passion for the subject of the competition is the most important motivation to take it. A necessity of proving of own abilities is almost as important. A striking negligible influence of parents, siblings, classmates on the decision to enter a competition gives a lot to think about. Is the school the only and primary support for gifted students? The main source of information about competitions seems to be a direct conversation with the teacher. Press information, posters and even messages posted on websites of competitions seem to be completely unnoticed by middle and high school students.

**Table 6.**

group of respondents	female	male	critical region	number of runs in Wald-Wolfowitz test		$H_0$ rejected	
				middle school	high school	middle school	high school
all resp.	38	27	[2, 25]	11	10	yes	yes
SHVS maths	15	6	[2, 6]	8	6	no	yes
JU maths	15	13	[2, 10]	11	20	no	no
JU bio	8	8	[2, 5]	6	8	no	no

**Table 7.**

	middle school (13-16 years)						high school (16-19 years)					
	all resp.	female	male	SHVS	JU maths	JU bio	all resp.	female	male	SHVS	JU maths	JU bio
I liked the subject of the competition	<b>5</b>	5	5	5	5	4	<b>5</b>	5	5	5	5	5
I just wanted to check my abilities	<b>4</b>	4	4	4	5	4	<b>5</b>	5	5	5	5	5
I decided myself to participate in the competition	<b>4</b>	4	4	4	5	4	<b>5</b>	5	5	5	4.5	5
My teacher encouraged me to enter the competition	<b>4</b>	4	4	4	4	5	<b>4</b>	4	3	3	4	4
My parents encouraged me	<b>3</b>	3	3	3	3	3	<b>3</b>	2.5	3	2	3	3
The promise of a better assessment in my school	<b>3</b>	3	3	3	3	4	<b>2</b>	2	2	2.5	2	3
Additional points in the recruitment to high school or university	<b>3</b>	3	1	2	3	3	<b>2</b>	2	2	2	2	4
An attractive prize foreseen for the winner or finalist	<b>2</b>	3	2	3	2	2	<b>2</b>	2.5	2	2	2	2
The promise of exemption from a final examination							<b>2</b>	2	2	2	1	3
An information founded on a poster in school	<b>1.5</b>	2	1	2	1	2	<b>2</b>	1	2	2	1	2
A classmate encouraged me	<b>2</b>	2	2	2	1	1	<b>1</b>	1	2	2	1	1
An information on a website	<b>1</b>	1	1	1	1	1	<b>1</b>	1	1	1	2	1
My older brother or sister encouraged me	<b>1</b>	1	1	1	1	1	<b>1</b>	1	1	1	1	1
An information in newspapers	<b>1</b>	1	1	1	1	1	<b>1</b>	1	1	1	1	1

Additional comments left by some of the respondents shed some light on the motivation to take part in competitions and on sources of information about them. One respondent has written “In my middle school I had many classmates good at mathematics and we were racing in the number of competitions in which we started. If we had a teacher in high school who could help me and my colleagues in preparation for the Mathematical Olympiad, the preparation would be both fun and more effective”. A few more respondents also complained about the lack of sufficient support from teachers in high school.

The talented individuals who love problem solving and finding non-standard new solutions are a treasure which must not be squandered. The modern society focusing on harmonious development is trying to identify young potentially talented people and to deliver them the most adequate education. Properly trained teachers taking care about gifted students in middle and high school are currently the basic support for the talented individuals.

In the present note we do not develop the problem of the proper preparation of teachers who

support talented students. It is widely discussed in several publications, see eg. [1] and references given there.

## Acknowledgments

The author is grateful to all his students who answered the questionnaire concerning mathematical competitions in autumn 2016.

## References

1. E. J. Barbeau, P. J. Taylor (ed.) *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom, The 16<sup>th</sup> ICMI Study*, International Commission on Mathematical Instruction, Springer, 2009.
2. L. Gajek, M. Kałuszka, *Wnioskowanie statystyczne. Modele i metody*, wydanie czwarte, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2000.
3. R. C. Mittelhammer, *Mathematical Statistics for Economics and Business*, Second Edition, Springer, 2013.



# Pewna uwaga o geometrii wykresu funkcji zliczającej liczby pierwsze

## A certain note about the geometry of the prime counting function graph

Edward Tutaj<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Tarnowie, ul. Mickiewicza 8, 33-100 Tarnów, Polska

\*Corresponding author: edward.tutaj@im.uj.edu.pl

---

### Streszczenie

Obwiednia wypukła podwykresu funkcji zliczającej liczby pierwsze  $x \rightarrow \pi(x)$  jest zbiorem wypukłym ograniczonym od góry przez wykres pewnej kawałkami liniowej funkcji  $x \rightarrow \epsilon(x)$ . Wierzchołki tego zbioru (węzły łamanej) tworzą nieskończony ciąg punktów  $(e_k, \pi(e_k))_1^\infty$ . W niniejszej pracy przedstawione będą pewne obserwacje dotyczące ciągu  $(e_k)_1^\infty$  sugerowane przez zbiór 2500 jego początkowych wyrazów.

**Słowa kluczowe:** liczby pierwsze, funkcja zliczająca liczby pierwsze, hipoteza Riemanna

### Abstract

The convex envelope of the subgraph of the prime counting function  $x \rightarrow \pi(x)$  is a convex set bounded from above by a certain piece-wise linear function  $x \rightarrow \epsilon(x)$ . The vertices of this set (nodes of the polyline) form an infinite sequence of points  $(e_k)_1^\infty$ . In this paper we will present some observations on the sequence  $(e_k)_1^\infty$  suggested by the set of 2500 of its initial terms.

**Key words:** prime numbers, function counting the prime numbers, Riemann's hypothesis

---

### Wstęp

Liczby pierwsze to generatory półgrupy multiplikatywnej  $\mathbb{N}^*$  (gdzie  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ ). Nie można ich rozróżnić używając jedynie języka mnożenia. Można to natomiast zrobić wykorzystując naturalny porządek w  $\mathbb{N}^*$ . Funkcja  $x \rightarrow \pi(x)$ , zwana *funkcją*

zliczając liczby pierwsze, której definicję przypominamy niżej, jest przykładem odwołania się do tego typu porządkowych własności. Funkcja ta, znana od ponad dwu wieków, jest jednym z najintensywniej badanych obiektów matematycznych i to przez najwybitniejszych uczonych. Mimo to nie znamy odpowiedzi na pewne ważne, dotyczące tej funkcji, pytania. Związane są one z tzw. hipotezą Riemanna o położeniu nietrywialnych zer funkcji dzeta. To trudna problematyka, przekraczająca kompetencje autora niniejszego artykułu. W pracy tej zajmiemy się prostszym pojęciowo badaniem niektórych geometrycznych własności wykresu funkcji  $\pi$ . Są one z jednej strony łatwe do zdefiniowania i relatywnie łatwe do numerycznego badania, a z drugiej strony prowadzą do trudnych pytań.

Pewne geometryczne własności wykresu  $\pi$  były badane wiele lat temu (1979) między innymi przez C. Pommerance [4] i nie tak dawno temu (2006) przez H. L. Montgomery'ego i S. Wagona [2]. Przypomnimy teraz pewne definicje i oznaczenia.

Niech  $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$  oznacza ciąg liczb pierwszych, t.j.  $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ . Zazwyczaj funkcję  $\pi: [2, \infty) \rightarrow [1, \infty)$  definiuje się wzorem:

$$\pi(x) = \sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq x} 1. \quad (1)$$

czyli  $\pi(x)$  jest liczbą liczb pierwszych nie większych niż  $x$ .

Jednym z najważniejszych twierdzeń w teorii liczb, do którego będziemy się odwoływać, jest twierdzenie o rozmieszczeniu liczb pierwszych – w skrócie PNT – postulowane niezależnie przez Gaussa i Legendre'a na przełomie XVIII i XIX wieku, a udowodnione dopiero pod koniec XIX wieku przez Hadamard'a i de la Vallée-Poussin'a:

**Twierdzenie 1.** *Zachodzi równość:*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1.$$

W niektórych rozumowaniach i interpretacjach wygodniej będzie posługiwać się funkcją  $\pi^*: [2, \infty) \rightarrow [1, \infty)$  określoną przez warunki:  $\pi^*(p_k) = \pi(p_k)$ ,  $\pi^*$  jest ciągła i afiniczna w przedziałach  $[p_k, p_{k+1}]$ .

### Definicja liczb pierwszych ekstremalnych

Funkcja  $\pi^*$  jest rosnąca i ciągła, i gdy „patrzyć na nią z daleka”, wydaje się być funkcją wklęsłą, chociaż taką nie jest. Dopuszcza ona jednak majoranty wklęsłe. W szczególności wiadomo, że istnieje stała  $B > 1$  taka, że:

$$\pi(x) < B \cdot \frac{x}{\ln(x)} \quad (2)$$

(wynika to oczywiście z PNT (Prime Number Theorem), ale udowodnione było wcześniej).

Rozważmy zbiór

$$\Omega = \{f: [2, \infty) \rightarrow [1, \infty): f \geq \pi^*, f - \text{wklęsła}\}, \quad (3)$$

i zauważmy, chociaż to nie będzie odgrywało roli w naszych rozważaniach, że  $\Omega$  jest podzbiorem stożka wektorowego wszystkich nieujemnych i wklęsłych funkcji na  $[2, \infty)$ .

Kładziemy dla  $x \in [2, \infty)$

$$\epsilon(x) = \inf \{f(x): f \in \Omega\}, \quad (4)$$

t.j. funkcja  $\epsilon$  jest obwiednią dolną rodziny  $\Omega$ . Innymi słowy funkcja  $\epsilon$  jest najmniejszą funkcją wklęsłą, która jest większa lub równa niż  $\pi^*$  (równoważnie, niż  $\pi$ ). Nietrudno zauważyć, że  $\epsilon$  jest wklęsła i kawałkami afiniczna, a zatem zbiór

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in [2, \infty), 0 \leq y \leq \epsilon(x)\} \quad (5)$$

jest wypukły. Przypomnijmy, że gdy  $U$  jest zbiorem wypukłym i  $b \in U$ , to mówimy, że  $b$  jest *punktem ekstremalnym* zbioru  $U$ , wtedy i tylko wtedy, gdy  $b$  nie jest punktem wewnętrznym nietrywialnego odcinka leżącego w  $U$ .

Możemy teraz sformułować następującą definicję.

### Definicja 2.

*Liczbę pierwszą  $p \in \mathbb{P}$  będziemy nazywali ekstremalną liczbą pierwszą, gdy punkt  $(p, \pi(p))$  jest punktem ekstremalnym zbioru wypukłego  $\Gamma$ .*

### Własności zbioru liczb pierwszych ekstremalnych

Niech  $\mathbb{E}$  oznacza zbiór wszystkich liczb pierwszych ekstremalnych. Czasami wygodniej jest mówić o ciągu liczb pierwszych ekstremalnych  $\mathbb{E} = \{e_1, e_2, \dots\}$ , gdzie  $e_1 < e_2 < e_3 \dots$ , t.j. ciąg  $(e_k)_1^\infty$  jest silnie rosnący.

Łatwo sprawdzić, że 2, 3 i 7 są liczbami ekstremalnymi, natomiast np. 11, 17 nie są liczbami ekstremalnymi. Zatem  $\mathbb{E}$  i  $\mathbb{N}^* \setminus \mathbb{E}$  są zbiorami niepustymi.

Nieco ciekawsza jest następująca propozycja.

**Propozycja 3.** *Zbiór  $\mathbb{E}$  jest nieskończony.*

*Dowód.*

Niech  $l_k$  oznacza linię prostą (funkcję afiniczną przechodzącą przez punkty  $(e_{k-1}, \pi(e_{k-1}))$  i  $(e_k, \pi(e_k))$ ). Z Definicji 1 wynika, że wykres funkcji  $\epsilon$  leży poniżej linii  $l_k$ . Daje to prostą, indukcyjną metodę znalezienia następnej liczby ekstremalnej  $e_{k+1}$ , o ile dane są

$e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, e_k$  (w istocie wystarczy znać tylko  $e_{k-1}$  i  $e_k$ ). W tym celu rozważamy ilorazy różnicowe postaci

$$I_k(p) = \frac{\pi(p) - \pi(e_k)}{p - e_k}, \quad (6)$$

dla  $p \in \mathbb{P}, p > e_k$ . Z uwagi poczynionej wyżej wynika, że dla każdego  $p > e_k$  mamy:

$$0 < I_k(p) < \frac{\pi(e_k) - \pi(e_{k-1})}{e_k - e_{k-1}} = I_{k-1}(e_k). \quad (7)$$

Wykorzystując ogólnie znany fakt

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\pi(p)}{p} = 0 \quad (8)$$

mamy  $\lim_{p \rightarrow \infty} I_k(p) = 0$ . Istnieje zatem skończony zbiór  $\mathbb{P}_k \subset \mathbb{P}$  liczb pierwszych taki, że  $p_o \in \mathbb{P}_k \Rightarrow p_o > e_k$  i taki, że  $I_k(p) \leq I_k(p_o)$  dla  $p > e_k$ . Kładziemy  $e_{k+1} = \max \mathbb{P}_k$  i to kończy dowód faktu, że  $\mathbb{E}$  jest nieskończony.

Niech

$$\delta_k = \frac{\pi(e_{k+1}) - \pi(e_k)}{e_{k+1} - e_k}, \quad (9)$$

t.j.  $\delta_n$  jest nachyleniem n-tego segmentu leżącego na wykresie funkcji  $\epsilon$ . Ponieważ  $\epsilon$  jest rosnąca i wklęsła, więc ciąg  $(\delta_k)_1^\infty$  jest dodatni i ściśle malejący. Zauważmy, że ciąg  $(\delta_k)_1^\infty$  może być identyfikowany z pochodną funkcji  $\epsilon$ . Wobec monotoniczności istnieje granica  $\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k \geq 0$  i musi być równa zero ( $\delta = 0$ ), co wynika raz jeszcze z twierdzenia Legendre'a.

Liczba  $\alpha_k = \delta_k^{-1}$  jest miarą gęstości liczb pierwszych w przedziale  $[e_k, e_{k+1})$  i może być interpretowana jako średnia różnica między kolejnymi liczbami pierwszymi w tym przedziale. Z uwagi poczynionej wyżej wynika, że ciąg  $(\alpha_k)_1^\infty$  jest silnie rosnący.

Naturalnym jest pytanie o moc zbioru  $\mathbb{N} \setminus \mathbb{E}$ . Mamy

**Propozycja 4.** *Zbiór  $\mathbb{N} \setminus \mathbb{E}$  jest nieskończony.*

*Dowód.*

Chociaż ta własność jest spodziewana, to jej uzasadnienie nie jest całkiem banalne, bo wiąże się z istnieniem małych różnic między liczbami pierwszymi. Zauważmy, że  $\text{card}(\mathbb{N} \setminus \mathbb{E}) < \infty$  jest sprzeczne z hipotezą par bliźniaczych. Nie tak dawno udowodniono, że  $\liminf (p_{n+1} - p_n) < 7 \cdot 10^7$  [4]. Wobec uwagi poczynionej wyżej zapewnia to nieskończoność zbioru  $\mathbb{N} \setminus \mathbb{E}$ .

Liczby pierwsze ekstremalne kolejno, czy też zbiór liczb pierwszych ekstremalnych w całości, mogą być definiowane na wiele, nieco się różniących sposobów. Omówimy niektóre. Jak wiadomo, funkcja jest wypukła (wklęsła) gdy w każdym podprzedziale przedziału określoności spełnia nierówność Jensena. Weźmy pod uwagę funkcję  $\pi^*$  i przedział  $[a, b] \subset [2, \infty)$ . Będziemy mówili, że  $[a, b]$  jest *nietypowy*, gdy dla  $\lambda \in (0, 1)$  mamy

$$\pi^*(\lambda \cdot a + (1 - \lambda) \cdot b) < \lambda \pi^*(a) + (1 - \lambda) \pi^*(b). \quad (10)$$

Łatwo sprawdzić, że przedziały nietypowe istnieją i ich przestrzeń, z porządkiem danym przez inkluzję, ma elementy maksymalne. Końce takich maksymalnych przedziałów (dla  $\pi^*$ ) to właśnie liczby pierwsze ekstremalne.

Można także zauważyć, że zbiór  $\mathbb{E}$  jest w pewnym sensie minimalny, ze względu na własność (10). Istotnie, przypuśćmy, że  $\mathbb{G} = (g_i)_1^\infty$  jest podciągiem ciągu  $\mathbb{P}$  liczb pierwszych, takim, że  $g_1 = 2$ .

Niech

$$\delta_k(\mathbb{G}) = \frac{\pi(g_{k+1}) - \pi(g_k)}{g_{k+1} - g_k}. \quad (11)$$

Będziemy mówili, że  $\mathbb{G}$  jest wklęsły, gdy  $\delta_k(\mathbb{G})$  jest silnie malejący. Dla przykładu  $\mathbb{E}$  jest wklęsły, podczas gdy  $\mathbb{P}$  nie jest wklęsły. Podciąg ciągu wklęsłego jest wklęsły.

Ciąg  $\mathbb{E}$  liczb pierwszych ekstremalnych ma następującą własność:

**Propozycja 5.** *Przypuśćmy, że ciąg  $(g_k)_1^\infty$  jest wklęsły i ciąg  $\mathbb{E}$  jest podciągiem ciągu  $\mathbb{G}$ . Wtedy  $\mathbb{E} = \mathbb{G}$ .*

*Dowód.* Oczywiście  $e_1 = g_1 = 2$ . Ponieważ nie ma liczb pierwszych między 2 i 3, oraz  $e_2 \in \mathbb{G}$ , więc także  $e_2 = g_2 = 3$ . Przypuśćmy teraz, że  $e_i = g_i$  dla  $1 \leq i \leq k$ . Chcemy pokazać, że  $e_{k+1} = g_{k+1}$ . Przypuśćmy przeciwnie, czyli że  $e_{k+1} \neq g_{k+1}$  oraz że  $g_{k+m} = e_{k+1}$ , t.j. że

$$e_k = g_k < g_{k+1} < g_{k+2} < \dots < g_{k+m} = e_{k+1}.$$

Teraz, przy oznaczeniach Propozycji 2 i definicji  $e_{k+1}$  mamy, dla  $i < m$ :

$$\delta_k(\mathbb{G}) = I_k(g_{k+1}) < \delta_k(\mathbb{E}) \quad (12)$$

Rozważmy funkcję  $H: [e_k, e_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ , taką że  $H(g_{k+i}) = \pi(g_{k+i})$  i ponadto  $H$  jest afiniczna i ciągła w każdym przedziale  $[g_{k+i}, g_{k+i+1}]$ . Widzimy, że funkcja  $H$  jest ciągła i

różniczkowalna poza zbiorem skończonym i że jej pochodna w przedziałach  $(g_{k+i}, g_{k+i+1})$  jest stała i równa  $\delta_{k+i}(\mathbb{G})$ . Ponieważ  $\mathbb{G}$  jest wypukły, to

$$\sup \{H'(x): x \in [e_k, e_{k+1}]\} = \delta_k(\mathbb{G}) < \delta_k(\mathbb{E}). \quad (13)$$

Funkcja  $H$  dopuszcza stosowanie do niej twierdzenia o wartości średniej, co prowadzi do

$$\sup \{H'(x): x \in [e_k, e_{k+1}]\} = \delta_k(\mathbb{G}) < \delta_k(\mathbb{E}). \quad (14)$$

a to jest niemożliwe.

### Przedstawienie pewnych danych numerycznych

Posługując się programem *Mathematica* wyliczyliśmy 2500 początkowych liczb ekstremalnych. Przedstawiamy poniżej wybrane fragmenty tych danych.

Oto trzydzieści osiem początkowych liczb pierwszych ekstremalnych:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$e_n$	23	719	4773	113199	283467	661887	11291327							

$n$	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$e_n$	16272803	39474297	58816379	70439949	1034313187	1582318461	24137						

$n$	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
$e_n$	3364734763	3766342863	4306759753	5779782619	96017102679	129643					

Lista  $e_k$  gdzie  $k \leq 2500$  i  $k \equiv 0 \pmod{100}$ :

$e_{100}$	5253173
$e_{200}$	67596937
$e_{300}$	314451367
$e_{400}$	883127303
$e_{500}$	2122481761
$e_{600}$	4205505103
$e_{700}$	7274424463
$e_{800}$	12251434927

$e_{900}$	19505255383
$e_{1000}$	28636137347
$e_{1100}$	40001601779
$e_{1200}$	55036621907
$e_{1300}$	73753659461
$e_{1400}$	97381385771
$e_{1500}$	125232859691
$e_{1600}$	157169830847
$e_{1700}$	196062395777
$e_{1800}$	241861008029
$e_{1900}$	296478801431
$e_{2000}$	365234091199
$e_{2100}$	435006680401
$e_{2200}$	524320812671
$e_{2300}$	625382499043
$e_{2300}$	625382499043
$e_{2400}$	727995116377
$e_{2500}$	842057152381

Z analizy danych liczbowych dotyczących liczb ekstremalnych można wyciągać pewne przypuszczenia, które jednak nie wydają się być łatwymi do udowodnienia. Oto niektóre z nich.

1. Liczba ekstremalna  $e_{2500} = 842057152381$  ma w ciągu liczb pierwszych numer

$$\pi(842057152381) = 31874435493, \quad (15)$$

z czego można wnosić, iż liczby ekstremalne są rzadko rozmieszczone w zbiorze liczb pierwszych (mniej niż jedna na milion w zakresie do  $10^{12}$ ). Można stąd wnosić, że następująca hipoteza jest prawdziwa:

**Hipoteza 6. Szereg**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e_k}$$

jest zbieżny.

Suma 10-ciu pierwszych wyrazów tego szeregu wynosi ok. 1,0830, zaś suma 2500 pierwszych wyrazów tego szeregu jest mniejsza niż 1,0903.

2. Można, w analogii do definicji funkcji  $\pi$ , zdefiniować funkcję  $\pi_\epsilon$  następującą formułą:

$$\pi_\epsilon(x) = \sum_{p \in \mathbb{E}, p \leq x} 1. \quad (16)$$

Pytamy teraz, o możliwie mały wykładnik  $\alpha$ , taki, że funkcja  $x^\alpha$  rośnie szybciej niż  $\pi_\epsilon(x)$ .

Dokładniej, stawiamy następujące pytanie. Czy

**Hipoteza 7.** *Istnieje*

$$\inf \{ \alpha > 0 : \pi_\epsilon(x) = o(x^\alpha) \}$$

*i jest dodatnie.*

3. Jest oczywistym, że  $\pi(e_{k+1}) - \pi(e_k) \geq 1$ , jednak równość nie jest wykluczona. Innymi słowy, kolejne liczby ekstremalne mogą być zarazem kolejnymi elementami w ciągu liczb pierwszych. Poza trywialnym przypadkiem  $e_1 = 2$  i  $e_2 = 3$  wśród naszych danych są jeszcze dwa takie przypadki dla  $k = 116$  i  $k = 976$ . Nie widać fundamentalnych przyczyn, które by wykluczały istnienie innych osobliwości tego typu.

4. Najbardziej interesujące wydaje się przypuszczenie

**Hipoteza 8.** *Przy oznaczeniach jak wyżej*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = 1.$$

Zajmiemy się nim w następnej części pracy.

## Definicja i własności soczewek

Z rozważań poprzedniej części wynika, że przedziały, których końcami są kolejne liczby ekstremalne, są elementami maksymalnymi ze względu na spełnianie nierówności Jensena. Będziemy je dalej nazywać soczewkami. Dokładniej

**Definicja 9.** *Dla liczby całkowitej dodatniej  $k \in \mathbb{N}$  zbiór*

$$S_k = \{n \in \mathbb{N} : e_k \leq n < e_{k+1}\}$$

*będziemy nazywać soczewką. Różnicę  $e_{k+1} - e_k$  będziemy nazywać długością soczewki  $S_k$  i oznaczać symbolem  $|S_k|$ .*

Czasami będziemy używać terminu soczewka w odniesieniu do części wykresu funkcji  $\pi^*$  dla  $x \in [e_k, e_{k+1}]$ , bądź do wykresu funkcji  $[e_k, e_{k+1}] \ni x \rightarrow \delta_k(x - e_k) + \pi(e_k) - \pi^*(x)$ . Z rozważań zamieszczonych wyżej wynika, że długość soczewki  $S_k$  zmierza do nieskończoności, w miarę wzrostu  $k$ . Naszym zamierzeniem będzie bliższe przyjrzenie się szybkości tej zbieżności. Do tego celu wygodne będzie rozważanie funkcji  $x \rightarrow S(x)$  gdzie  $S(x) = |S_k|$  dla  $x \in [e_k, e_{k+1})$ .



Weźmy pod uwagę następującą hipotezę:

**Hipoteza 10.** Funkcja  $x \rightarrow S(x)$  spełnia warunek

$$S(x) = o(x)$$

dla  $x \rightarrow \infty$ .

Zauważmy najpierw, że

**Propozycja 11.** Hipotezy 8 i 10 są równoważne.

Ta równoważność będzie udowodniona szczegółowo nieco dalej. Chwilowo zauważmy tylko, że mamy oczywistą, wynikającą wprost z definicji, równość

$$e_{k+1} = e_k + |S_k| = e_k + S(e_k),$$

skąd po podzieleniu obu stron przez  $e_k$  otrzymujemy

$$\frac{e_{k+1}}{e_k} = 1 + \frac{S(e_k)}{e_k},$$

co kończy dowód implikacji w jedną stronę.

Zauważmy dalej, że

**Propozycja 12.** Jeżeli

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = 1$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1.$$

*Dowód.*

Dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  istnieje  $k(n) \in \mathbb{N}$  takie, że

$$e_{k(n)} \leq p_n < p_{n+1} \leq e_{k(n)+1}.$$

Zatem

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \leq \frac{e_{k(n)+1}}{e_{k(n)}}$$

zaś ostatni ciąg zmierza zgodnie z założeniem do 1, jako podciąg ciągu zbieżnego do 1.

Warto w tym miejscu przypomnieć pewną uwagę Erdösa (także Selberga [1]), który miał powiedzieć „z równości  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1$  potrafię wywieść elementarny dowód PNT”. I tak istotnie zrobił. Jeżeli zatem hipoteza 8 lub 10 jest prawdziwa, to trudno się spodziewać, iż ma ona łatwy, elementarny dowód.

## Logarytm całkowy

W tym rozdziale pokażemy, że hipoteza o wielkości soczewek w nieskończoności  $S(x) = o(x)$  jest konsekwencją hipotezy Riemann'a. W tym celu musimy przypomnieć pewne definicje i pewne znane fakty. Będziemy rozważać dwie doskonale znane, występujące w hipotezie Riemann'a, funkcje. Pierwsza z nich, to *logarytm całkowy*  $L: [2, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , zaś druga, to tzw. *funkcja błędu* (*error term*)  $\varepsilon: [2, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , dane wzorami

$$L(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt \quad (17)$$

oraz

$$\varepsilon(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x. \quad (18)$$

Wraz z tymi funkcjami będziemy rozważać funkcje

$$\varphi(x) = L(x) - \varepsilon(x) \quad (19)$$

oraz dla

$x \in (2, \infty)$  and  $h \in \mathbb{R}$

$$l(x, h) = \varphi'(x) \cdot h + \varphi(x) \quad (20)$$

Oczywiście wszystkie te funkcje są analityczne co najmniej w przedziale  $(2, +\infty)$ . Będziemy potrzebować pochodnych rozważanych funkcji do czwartego rzędu włącznie. W występujących poniżej wzorach będziemy pisać  $y$  zamiast  $\ln(x)$  by nadać tym wzorom bardziej zwartą formę. Mamy więc:

$$L^{(1)}(x) = \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{y} \quad (21)$$

$$L^{(2)}(x) = \frac{-1}{x \cdot \ln x} = \frac{-1}{x \cdot y^2} \quad (22)$$

$$L^{(3)}(x) = \frac{\ln x + 2}{x^2 \cdot \ln^3(x)} = \frac{y + 2}{x^2 \cdot y^3} \quad (23)$$

$$L^{(4)}(x) = \frac{-(2 \cdot \ln^2(x) + 6 \ln x + 6)}{x^3 \cdot \ln^4(x)} = \frac{-(2 \cdot y^2 + 6y + 6)}{x^3 \cdot y^4} \quad (24)$$

Pochodne funkcji błędu, zapisane w podobny sposób, przedstawiają się tak:

$$\varepsilon(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x = \sqrt{x} \cdot y, \quad (25)$$

$$\varepsilon^{(1)}(x) = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} = \frac{y + 2}{2\sqrt{x}}, \quad (26)$$

$$\varepsilon^{(2)}(x) = \frac{-\ln x}{4x\sqrt{x}} = \frac{-y}{4x\sqrt{x}} \quad (27)$$

$$\varepsilon^{(3)}(x) = \frac{3 \ln x - 2}{8x^2\sqrt{x}} = \frac{3y - 2}{8x^2\sqrt{x}} \quad (28)$$

$$\varepsilon^{(4)}(x) = \frac{-15 \ln x + 16}{16x^3\sqrt{x}} = \frac{-15y + 16}{16x^3\sqrt{x}}. \quad (29)$$

Zauważmy, że drugie pochodne, tak funkcji  $L$ , jak i funkcji  $\varepsilon$  są ujemne, więc obie te funkcje są w swoich dziedzinach wklęsłe.

Druga pochodna funkcji  $\varphi$  ma postać

$$\varphi^{(2)}(x) = \frac{-4\sqrt{x} + \ln^3(x)}{x\sqrt{x} \ln^2(x)} = \frac{-4\sqrt{x} + y^3}{4x\sqrt{x}y^2}$$

zatem biorąc pod uwagę fakt, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-4\sqrt{x} + \ln^3(x)) = -\infty$$

możemy stwierdzić, że zachodzi następująca propozycja.

**Propozycja 13.** *Istnieje  $x_0 \in (2, \infty)$  takie, że funkcja  $\varphi$  jest wklęsła w przedziale  $[x_0, \infty)$ .*

### Uwaga o wielomianach Taylora rozważnych funkcji

Ustalmy punkt  $x \in (2, \infty)$ . Niech  $T_{x,L}^{(3)}$  oznacza wielomian Taylora rzędu trzy funkcji  $L$  o centrum w  $x$ . Zatem

$$T_{x,L}^{(3)}(h) = L(x) + L^{(1)}(x) \cdot h + \frac{1}{2} \cdot L^{(2)}(x) \cdot h^2 + \frac{1}{6} \cdot L^{(3)}(x) \cdot h^3. \quad (30)$$

Reszta  $R_x^{(3)}(h) = L(x+h) - T_{x,L}^{(3)}(h)$ , zapisana w formie Lagrange'a, dana jest wzorem:

$$R_x^{(3)}(h) = \frac{1}{24} L^{(4)}(\xi) \cdot h^4, \quad (31)$$

gdzie  $\xi$  jest punktem z przedziału  $(x, x+h)$ . Ponieważ  $L^{(4)} < 0$  w całej swojej dziedzinie, to zachodzi poniższa nierówność.

**Propozycja 14.** Dla każdego  $x \in (2, \infty)$  i dla każdego  $h \in (2-x, \infty)$  prawdziwa jest następująca nierówność:

$$L(x+h) \leq T_{x,L}^{(3)}(h).$$

Niech  $T_{x,\varepsilon}^{(3)}$  oznacza wielomian Taylora rzędu trzy funkcji  $\varepsilon$  o centrum w  $x$ , i.e.

$$T_{x,\varphi}^{(3)}(h) = \varepsilon(x) + \varepsilon^{(1)}(x) \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \varphi^{(2)}(x) \cdot h^2 + \frac{1}{6} \cdot L^{(3)}(x) \cdot h^3. \quad (32)$$

Używając podobnej argumentacji jak w przypadku funkcji  $L$  mamy:

**Propozycja 15.** Dla każdego  $x \in (2, \infty)$  i dla każdego  $h \in (2-x, \infty)$  prawdziwa jest następująca nierówność:

$$\varepsilon(x+h) \leq T_{x,\varepsilon}^{(3)}(h).$$

W konsekwencji mamy nierówność (dla  $h \in (2-x, \infty)$ ):

$$L(x+h) + \varepsilon(x+h) < T_{x,L}^{(3)}(h) + T_{x,\varepsilon}^{(3)}(h). \quad (33)$$

### Definicja pewnych dwóch funkcji

W tym rozdziale zdefiniujemy dwie funkcje  $h_+ : (x_o, \infty) \ni x \rightarrow h_+(x) \in \mathbb{R}$  i  $h_- : (x_o, \infty) \ni x \rightarrow h_-(x) \in \mathbb{R}$ , gdzie  $x_o$  jest punktem zdefiniowanym w Propozycji 13. W szczególności omówimy definicję funkcji  $h_+$ . Definicja funkcji  $h_-$  będzie podobna.

Ustalmy punkt  $x \in (x_o, \infty)$ . Weźmy pod uwagę styczną  $l(x, h)$  do wykresu funkcji  $\varphi$  w punkcie  $(x, \varphi(x))$ . Jej równanie ( $h \in \mathbb{R}$ ) ma postać:

$$\begin{aligned} l(x, h) &= \varphi'(x) \cdot h + \varphi(x) \\ &= (L'(x)h - \varepsilon'(x))h + L(x) - \varepsilon(x). \end{aligned} \quad (34)$$

Półproste otrzymane, gdy we wzorze (34) ograniczymy się do  $h \in [0, \infty)$  lub  $h \in (-\infty, 0]$  będziemy oznaczać symbolami  $l_+(x, h)$  or  $l_-(x, h)$  odpowiednio.

Dla  $h = 0$  mamy nierówność:

$$l(x, 0) = \varphi(x) = L(x) - \varepsilon(x) < L(x) + \varepsilon(x).$$

Oznacza to, że półprosta  $l_+$  „startuje” z punktu wewnętrznego  $(x, L(x) - \varepsilon(x))$  podwykresu  $L + \varepsilon$ , który jest zbiorem wypukłym. Ponieważ

$$\frac{d}{dh} L(x+h) = \frac{1}{\ln(x+h)}$$

i

$$\frac{d}{dh} \varepsilon(x+h) = \frac{\ln(x+h) + 2}{2\sqrt{x+h}}$$

zatem

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{d}{dh} (L(x+h) + \varepsilon(x+h)) = 0.$$

Z drugiej strony

$$\frac{d}{dh} l(x+h) = \varphi'(x) > 0,$$

z czego wynika, że półprosta  $l_+(x, h)$  musi przeciąć wykres ściśle wklęsłej funkcji  $L(x+h) + \varepsilon(x+h)$  w dokładnie jednym punkcie. Oznacza to, że prawdziwe jest następujące twierdzenie:

**Propozycja 16.** *Dla każdego  $x \in (x_0, \infty)$  istnieje dokładnie jedna liczba dodatnia  $h_+(x)$  taka, że*

$$L(x+h_+(x)) + \varepsilon(x+h_+(x)) = \varphi'(x) \cdot h_+(x) + \varphi(x).$$

Mówiąc nieco inaczej, dla każdego  $x \in (x_0, \infty)$  równanie (o niewiadomej  $h$ )

$$L(x+h) + \varepsilon(x+h) = \varphi'(x) \cdot h + \varphi(x) \tag{35}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie dodatnie, które oznaczamy symbolem  $h_+(x)$ .

Jeżeli zastąpimy półprostą  $l_+(x, h)$ , przez półprostą  $l_-(x, h)$ , to stosując analogiczne rozumowanie, otrzymujemy następujący fakt.

**Propozycja 17.** *Dla każdego  $x \in (x_0, \infty)$  istnieje dokładnie jedna liczba ujemna  $h_-(x)$  taka, że*

$$L(x+h_-(x)) + \varepsilon(x+h_-(x)) = \varphi'(x) \cdot h_-(x) + \varphi(x).$$

Inaczej mówiąc równanie (35) ma dokładnie jedno rozwiązanie ujemne, które oznaczamy symbolem  $h_-(x)$ .

## Pewne równanie pomocnicze

Rząd wielkości długości soczewek w nieskończoności związany będzie z szybkością zmierzania do nieskończoności funkcji  $x \rightarrow h_+(x)$  i  $x \rightarrow h_-(x)$  (w istocie różnicy  $h_+(x) - h_-(x)$ ). Ponieważ równanie (35) jest trudne do rozwiązania, to, dla osiągnięcia zamierzonego oszacowania, będziemy rozważać pewne równanie pomocnicze:

$$T_{x,L}^{(3)}(h) + T_{x,\varepsilon}^{(3)}(h) = \varphi'(x) \cdot h + \varphi(x), \quad (36)$$

które może być zapisane w postaci

$$W_x(h) := \frac{1}{6}(L^{(3)}(x) + \varepsilon^{(3)}(x)) \cdot h^3 + \frac{1}{2}(L^{(2)}(x) + \varepsilon^{(2)}(x)) \cdot h^2 + 2\varepsilon^{(1)}(x) \cdot h + 2\varepsilon(x) = 0. \quad (37)$$

Jak widzimy, równanie (37) jest równaniem algebraicznym trzeciego stopnia. Ma ono więc co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Pokażemy, że równanie to ma zawsze trzy pierwiastki. Interesować nas będzie nie tylko istnienie pierwiastków równania (37), ale także ich znaki. Zauważmy, że wobec  $W_x(0) = 2\varepsilon(x) > 0$ , liczba  $h = 0$  nie może być pierwiastkiem rozważanego równania. Zauważmy też, że równanie (37) nie jest pojedynczym równaniem algebraicznym, ale jednoparametrową rodziną równań algebraicznych z parametrem  $x \in (x_0, \infty)$ .

Udowodnimy następujący lemat.

**Lemat 18.** *i). Istnieje  $x_+ \in (x_0, \infty)$ , taki, że dla  $x > x_+$  równanie  $W_x(h) = 0$  ma pierwiastek dodatni.*

*ii). Istnieje  $x_- \in (x_0, \infty)$  taki, że dla każdego  $x > x_-$  równanie  $W_x(h) = 0$  ma pierwiastek ujemny.*

Dowód lematu przeprowadzimy później wraz z dowodem Propozycji 23. Załóżmy więc, że Lemat 18 jest prawdziwy. Pozwoli to nam na zdefiniowanie dwu nowych funkcji  $h_+^*$  i  $h_-^*$ . Opiszemy w szczególach definicję funkcji  $h_+^*$ .

**Definicja 19.** *Niech  $x \in (x_+, \infty)$ . Wówczas zbiór dodatnich pierwiastków równania (35) jest niepusty i kładziemy*

$$h_+^*(x) = \min \{h > 0: W_x(h) = 0\}.$$

Związek między funkcjami  $h_+$  i  $h_+^*$  jest następujący:

**Propozycja 20.** *Jeżeli Lemat 18 jest prawdziwy, to dla  $x \in (x_+, \infty)$  zachodzi nierówność  $h_+(x) < h_+^*(x)$ .*

*Dowód.* Ustalmy  $x \in (x_+, \infty)$ . W przedziale  $[x, x + h_+(x)]$ , i.e. dla  $h \in [0, h_+(x)]$  linia  $l(x, h)$  leży poniżej wykresu funkcji  $L + \varepsilon$ . Wynika to wprost z definicji funkcji  $h_+(x)$ . Zatem w tym przedziale linia  $l(x, h)$  nie może przeciąć wykresu funkcji  $T_{x,\varepsilon}^{(3)} + T_{x,L}^{(3)}$  wobec nierówności (33). Zatem równanie  $W_x(h) = 0$  nie ma pierwiastków w przedziale  $h \in [0, h_+(x)]$ . Ale to oznacza, że  $h_+(x) < h_+^*(x)$ , co kończy dowód Propozycji 20.

Zakładając ponownie prawdziwość Lematu 18 możemy postawić następującą definicję.

**Definicja 21.** Niech  $x \in (x_-, \infty)$ . Wówczas zbiór ujemnych pierwiastków równania (37) jest niepusty. Kładziemy:

$$h_-^*(x) = \max \{h < 0 : W_x(h) = 0\}.$$

Zwrot „zbiór pierwiastków” jest w rozważanym przypadku pewnym nadużyciem, bo, jak łatwo sprawdzić, równanie (37) ma jeden pierwiastek ujemny i dwa dodatnie.

Związek między funkcjami  $h_-$  i  $h_-^*$  jest następujący:

### Propozycja 22.

Jeżeli Lemat 18 jest prawdziwy, wówczas dla  $x \in (x_-, \infty)$  zachodzi nierówność:  $h_-(x) > h_-^*(x)$ .

Dowód Propozycji 22 jest analogiczny do dowodu Propozycji 20.

### Dowód głównego lematu

Teraz udowodnimy Lemat 18. Równanie (37), którym się interesujemy, może być zapisane w formie:

$$A_3(x) \cdot h^3 + A_2(x) \cdot h^2 + A_1(x) \cdot h + A_0(x) = 0 \quad (38)$$

gdzie, używając wzorów 21-28, mamy:

$$\begin{aligned} A_3(x) &= \frac{1}{6}(L^{(3)}(x) + \varepsilon^{(3)}(x)) \\ &= \frac{1}{48} \cdot \frac{8\sqrt{x}(y+2) + y^3(3y-2)}{x^2\sqrt{x}y^3}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$A_2(x) = \frac{1}{2}(L^{(2)}(x) + \varepsilon^{(2)}(x)) = \frac{-1}{8} \cdot \frac{4\sqrt{x} + y^3}{x\sqrt{x}y^2}. \quad (40)$$

$$A_1(x) = \frac{y+2}{\sqrt{x}}, \quad (41)$$

$$A_0(x) = 2\sqrt{xy}. \quad (42)$$

Teraz, biorąc pod uwagę fakt, że dla dostatecznie dużych  $x$   $A_3(x) > 0$ , dzielimy równanie (38) przez  $A_3(x)$  i sprowadzamy równanie do postaci:

$$h^3 + B_2(x) \cdot h^2 + B_1(x) \cdot h + B_0(x) = 0 \quad (43)$$

gdzie

$$B_2(x) = \frac{A_2(x)}{A_3(x)} = -6x \frac{4\sqrt{xy} + y^4}{8\sqrt{xy} + 16\sqrt{x} + 3y^4 - 2y^3}, \quad (44)$$

$$B_1(x) = \frac{A_1(x)}{A_3(x)} = 48x^2 \frac{y^4 + 2y^3}{8\sqrt{xy} + 16\sqrt{x} + 3y^4 - 2y^3}, \quad (45)$$

$$B_0(x) = \frac{A_0(x)}{A_3(x)} = 96x^3 \frac{y^4}{8\sqrt{xy} + 16\sqrt{x} + 3y^4 - 2y^3}. \quad (46)$$

$$h^3 + B_2(x) \cdot h^2 + B_1(x) \cdot h + B_0(x) = 0 \quad (47)$$

Dla dalszej analizy równania (43) wygodnym będzie posłużenie się symbolami Landau'a. Przypomnijmy, że dla funkcji  $g$  określonej w otoczeniu  $+\infty$  będziemy pisać  $g = o(1)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ . Używając tej konwencji, możemy napisać:

$$B_2(x) = -6x \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)}, \quad (48)$$

$$B_1(x) = 48x^2 \frac{o(1)}{1 + o(1)}, \quad (49)$$

$$B_0(x) = 96x^3 \frac{o(1)}{1 + o(1)}. \quad (50)$$

Pozwala to na zapisanie równania (43) w postaci:



$$h^3 - 6x \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)} h^2 + 48x^2 \frac{o(1)}{1 + o(1)} h + 96x^3 \frac{o(1)}{1 + o(1)} = 0. \quad (51)$$

Teraz podstawiamy  $h = \theta x$ , co prowadzi do postaci:

$$\begin{aligned} \theta^3 x^3 - 6x \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)} \theta^2 x^2 + 48x^2 \frac{o(1)}{1 + o(1)} \theta x \\ + 96x^3 \frac{o(1)}{1 + o(1)} = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Ponieważ zajmujemy się tylko sytuacją, kiedy  $x > 0$ , to możemy podzielić ostatnie równanie przez  $x^3$ , otrzymując następujące równanie (z niewiadomą  $\theta$ ):

$$\theta^3 - 6 \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)} \theta^2 + 48 \frac{o(1)}{1 + o(1)} \theta + 96 \frac{o(1)}{1 + o(1)} = 0. \quad (53)$$

Na koniec, biorąc pod uwagę równość:

$$\frac{\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)} = \frac{1}{2} + o(1)$$

możemy zapisać równanie (52) w postaci:

$$\theta^3 - 3\theta^2 + v_2(x)\theta^2 + v_1(x)\theta + v_0(x) = 0, \quad (54)$$

gdzie  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$ ,  $v_0(x)$  są trzema dodatnimi funkcjami określonymi w otoczeniu  $+\infty$  i zbiegającymi do 0 gdy  $x$  zmierza do  $+\infty$ . Jeżeli dla ustalonego  $x'$  znajdziemy liczbę  $\theta'$  będącą pierwiastkiem równania (54), to wówczas liczba  $h' = \theta' \cdot x'$  jest pierwiastkiem równania (43). Wystarczy zatem badać równanie (54). Udowodnimy więcej.

**Propozycja 23.** *Dla każdego  $\alpha > 0$  istnieje punkt  $x_2$  taki, że dla każdego  $x > x_2$  równanie (53) ma w przedziale  $[-\alpha, \alpha]$  dokładnie dwa pierwiastki  $\theta_-$  i  $\theta_+$ , i ponadto  $\theta_- < 0 < \theta_+$ .*

*Dowód.* Istotnie, Propozycja 23 jest silniejsza niż Lemat 18, w którym postulujemy jedynie istnienie pierwiastków ujemnego i dodatniego. W Propozycji 23 dowodzimy nie tylko, że takie pierwiastki istnieją, ale że możemy je znaleźć w dowolnie małym przedziale o środku w 0. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że  $\alpha \leq 1$ . Ustalmy więc liczbę  $1 \geq \alpha > 0$  i wybierzmy  $x_2$  na tyle duży, że dla  $x > x_2$  mamy:

$$v_2(x) \cdot \alpha^2 + v_1(x) \cdot \alpha + v_0(x) < 2\alpha^2 \quad (55)$$

$$v_2(x) \cdot \alpha^2 - v_1(x) \cdot \alpha + v_0(x) < 2\alpha^2, \quad (56)$$

Taki punkt  $x_2$  istnieje, gdyż wszystkie trzy funkcje  $v_2, v_1, v_0$  są  $o(1)$  gdy  $x$  zmierza do  $+\infty$ .

Ustalmy  $x > x_2$ . Przepisujemy równanie w postaci:  $f(\theta) = g(\theta)$ , gdzie

$$f(\theta) = \theta^3 + v_2(x) \cdot \theta^2 + v_1(x) \cdot \theta + v_0(x), \quad (57)$$

i

$$g(\theta) = 3 \cdot \theta^2. \quad (58)$$

Położmy  $h(\theta) = f(\theta) - g(\theta)$  i weźmy pod uwagę przedział  $[0, \alpha]$ . Mamy:  $h(0) = f(0) - g(0) = v_0(x) > 0$  i, (ponieważ  $\alpha < 1$  oraz mamy nierówność (52)) otrzymujemy:

$$h(\alpha) = f(\alpha) - g(\alpha) = \alpha^3 + v_2(x) \cdot \alpha^2 + v_1(x) \cdot \alpha + v_0(x) < \alpha^2 + 2\alpha^2 - 3\alpha^2 = 0.$$

Zatem równanie ma pierwiastek  $\theta_+ \in (0, \alpha)$ .

Rozważmy teraz przedział  $[-\alpha, 0]$ . Dla  $\theta = 0$  mamy, jak wyżej  $h(0) = v_0(x) > 0$ . Dla  $\theta = -\alpha$  mamy (wobec  $-\alpha^3 < 0$  i nierówności

$$\begin{aligned} h(-\alpha) &= f(-\alpha) - g(-\alpha) = -\alpha^3 + v_2(x) \cdot \alpha^2 - v_1(x) \cdot \alpha + v_0(x) - 3\alpha^2 \\ &< v_2(x) \cdot \alpha^2 - v_1(x) \cdot \alpha + v_0(x) - 3\alpha^2 < 2\alpha^2 - 3\alpha^2 < 0. \end{aligned}$$

Powołując się raz jeszcze na argument ciągłościowy wnosimy o istnieniu pierwiastka  $\theta_-$  równania w przedziale  $(-\alpha, 0)$ . Zauważmy, że  $\theta_- \cdot x = h_-^*(x)$  oraz  $\theta_+ \cdot x = h_+^*(x)$ . To kończy dowód Propozycji 23, a zatem i Lematu 18.

## Rząd wzrostu soczewek

W rozważaniach poprzednich rozdziałów, pojawiły się cztery funkcje:  $h_-$ ,  $h_+$ ,  $h_-^*$  oraz  $h_+^*$ , które są zdefiniowane w pewnym przedziale postaci  $(M, \infty)$  i które spełniają następujące nierówności (dla każdego  $x \in (M, \infty)$ )

$$h_-^*(x) < h_-(x) < 0 < h_+(x) < h_+^*(x). \quad (59)$$

Naszym celem jest określenie rzędu wielkości w  $+\infty$  różnicy  $H(x) = h_+(x) - h_-(x)$ .

Udowodnimy następujące:

**Propozycja 24.** *Funkcja  $H$  spełnia związek:*

$$H(x) = o(x),$$

gdy  $x$  zmierza do  $+\infty$ .

*Dowód.* Wynika to bezpośrednio z własności sformułowanej w Propozycji 23. Istotnie wystarczy sprawdzić oddzielnie, że  $h_+(x) = o(x)$  oraz  $h_-(x) = o(x)$ . Dla udowodnienia pierwszej z tych relacji ustalmy dowolną liczbę dodatnią  $\epsilon > 0$ . Z Propozycji 23 (kładąc

$\alpha = \epsilon$ ) wynika, że istnieje  $M_1 > M$ , takie, że  $x > M_1$  implikuje istnienie liczby  $\theta < \epsilon$  ( $\theta$  zależnej od  $x$ ) takiej, że  $h_+^*(x) = \theta \cdot x$ . Ale to oznacza, że

$$\frac{h_+^*(x)}{x} < \epsilon$$

dla  $x > M_1$ . Dowód dla  $h_-^*$  jest analogiczny.

Teraz już możemy udowodnić twierdzenie o rzędzie wielkości soczewek  $S_k$  w nieskończoności, w oparciu o Propozycję 24. Najpierw jednak udowodnimy pewien lemat o ciągach zbieżnych do  $+\infty$ .

**Lemat 25.** *Przypuśćmy, że dane są cztery ciągi  $(x_k^-)_{k=1}^\infty, (x_k^+)_{k=1}^\infty, (z_k)_{k=1}^\infty$ , oraz  $(e_k)_{k=1}^\infty$  takie, że:*

$$0 < x_k^- \leq e_k < e_{k+1} \leq x_k^+, \quad (60)$$

$$x_k^- \leq z_k \leq x_k^+, \quad (61)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_k = +\infty, \quad (62)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k^+ - x_k^-}{z_k} = 0. \quad (63)$$

Wówczas

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1} - e_k}{e_k} = 0.$$

*Dowód.*

Z własności (60) i (62) wnosimy, że:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^+ = +\infty.$$

Dalej stwierdzamy, że również

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^- = +\infty.$$

Istotnie, przypuśćmy, że istnieje nieskończony zbiór  $\mathbb{L} \subset \mathbb{N}$  i stała  $K > 0$  takie, że  $0 \leq x_n^- \leq K$  dla  $n \in \mathbb{L}$ . Zatem dla  $n \in \mathbb{L}$  mamy:

$$0 \leq \frac{x_n^+ - K}{z_n} \leq \frac{x_n^+ - x_n^-}{z_n}$$

Stąd wobec (63)

$$\frac{x_n^+ - K}{z_n} \rightarrow 0, n \in \mathbb{L}.$$

Stąd z kolei wynika, że  $\lim_{n \in \mathbb{L}} z_n = +\infty$ . W konsekwencji

$$\lim_{n \in \mathbb{L}} \frac{x_n^+}{z_n} = 0,$$

a to zaś oznacza, że istnieje  $n \in \mathbb{L}$  takie, że  $x_n^+ < z_n$ , co jest niemożliwe, wobec (61).

Z nierówności

$$\frac{x_k^+ - x_k^-}{x_k^+} \leq \frac{x_k^+ - x_k^-}{z_k}$$

wnosimy, że

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_k^-}{x_k^+} = 1$$

a to pozwala na stwierdzenie, że

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_k^+ - x_k^-}{x_k^-} = 0.$$

Ale

$$\frac{x_k^+ - x_k^-}{e_k} \leq \frac{x_k^+ - x_k^-}{x_k^-}$$

więc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k^+ - x_k^-}{e_k} = 0.$$

Ponieważ

$$\frac{e_{k+1} - e_k}{e_k} \leq \frac{x_k^+ - x_k^-}{e_k}$$

to

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1} - e_k}{e_k} = 0,$$

co kończy dowód Lematu 25.

**Lemat 26.** Wykres funkcji  $\pi^*$  leży między wykresami funkcji  $L - \varepsilon$  oraz  $L + \varepsilon$ .

*Dowód.*

To dość oczywista własność, ale uzasadnienie tej oczywistości byłoby dłuższe niż formalny dowód. Załóżmy więc własność przeciwną. Oznacza to, że istnieją dwie kolejne liczby pierwsze  $p_n$  and  $p_{n+1}$ , takie, że punkty  $A = (p_n, n)$  i  $B = (p_{n+1}, n + 1)$  leżą między  $L - \varepsilon$  i  $L + \varepsilon$  natomiast odcinek  $[A, B]$  przecina wykres  $L - \varepsilon$  lub  $L + \varepsilon$ . Ponieważ podwykres  $L + \varepsilon$  jest wypukły, zatem  $[A, B]$  przecina jedynie wykres funkcji  $L - \varepsilon$ . To z kolei oznacza, że istnieje  $x \in (p_n, p_{n+1})$  taki, że punkt  $X = (x, n)$  leży pod wykresem  $L - \varepsilon$ , bo  $\pi$  jest

niewiększa od  $\pi^*$ . Ale  $X = (x, \pi(x))$ , zatem z definicji funkcji  $\varepsilon$  wynika, że  $X$  leży między wykresami  $L - \varepsilon$  i  $L + \varepsilon$ . To kończy dowód Lematu 26.

**Lemat 27.** *Niech  $S_k$  będzie soczewką zdefiniowaną przez ekstremalne liczby pierwsze  $e_k$  i  $e_{k+1}$ . Wówczas odcinek łączący punkty  $U = (e_k, \pi(e_k))$  i  $V = (e_{k+1}, \pi(e_{k+1}))$  nie może przecinać wykresu funkcji  $L - \varepsilon$  w dwu różnych punktach.*

*Dowód.* Teza wynika z Lematu 26 gdyż zgodnie z definicją punktów ekstremalnych, cały wykres  $\pi^*$  w przedziale  $[e_k, e_{k+1}]$  leży poniżej odcinka łączącego  $U$  i  $V$ , a jak pokazaliśmy wyżej, wykres  $\pi^*$  leży nad wykresem  $L - \varepsilon$ .

Główne twierdzenie niniejszego rozdziału to:

**Twierdzenie 28.** *Przy oznaczeniach jak wyżej, Hipoteza Riemann'a implikuje równość:*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = 1.$$

*Dowód.* Niech  $U$  i  $V$  będą jak w Lemacie 27. Niech  $l(U, V)$  będzie linią prostą łączącą  $U$  i  $V$ . Przesuniemy tę prostą równolegle w kierunku pionowym do pozycji  $l^*$ , gdzie linia prosta  $l^*$  jest równoległa do  $l(U, V)$  i styczna do wykresu funkcji  $L - \varepsilon$ . Linia ta –  $l^*$  – przecina wykres  $L + \varepsilon$  w punktach  $U^*$  i  $V^*$ , których pierwszymi współzrędnymi są liczby  $x_k^-$  oraz  $x_k^+$  odpowiednio, zaś pierwszą współzrędną punktu styczności jest  $z_k$ . Łatwo sprawdzić, że ciągi  $(x_k^-)_1^\infty, (x_k^+)_1^\infty, (z_k)_1^\infty$  i  $(e_k)_1^\infty$  spełniają założenia Lematu 25. To kończy dowód twierdzenia. Mamy też równoważne sformułowanie Twierdzenia 28.

**Wniosek 29.** *Funkcja długości soczewek  $x \rightarrow S(x)$  spełnia warunek  $S(x) = o(x)$ .*

## Uwagi końcowe

Naturalnym jest pytanie, czy twierdzenie o zachowaniu się długości soczewek w nieskończoności można udowodnić bez odwołania się do hipotezy Riemann'a i czy można dokładniej określić kształt funkcji  $S(x)$ . Podany w tej pracy dowód twierdzenia  $S(x) = o(x)$  oparty jest na rozwinięciu Taylora. Możliwym jest skorzystanie z twierdzenia o funkcjach uwikłanych w wersji z trywialną pierwszą różniczką i nietrywialną drugą, ale bez istotnego wpływu na długość dowodu. Jak wspomniałem, „łatwy” dowód twierdzenia  $S(x) = o(x)$ , bez zakładania Hipotezy Riemanna, jest mało prawdopodobny wobec wspomnianej wyżej deklaracji Erdösa. Szczegóły opisane są w świetnym artykule D. Goldfelda [1].

W odniesieniu do „kształtu” funkcji  $S(x)$ , są pewne przesłanki sugerujące relację  $S(x) = O(x^a)$ , dla pewnego  $0,5 < a < 1$  oczywiście przy założeniu hipotezy Riemanna. Dane eksperymentalne, wprawdzie szczupłe, wspierają to przypuszczenie. Na koniec dodajmy, że

ciąg liczb pierwszych ekstremalnych („wynaleziony” przez Autora niniejszej pracy) „mieszka” od trzech lat w *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* pod numerem A246033 i – jak dotąd – nikt nie zakwestionował legalności jego tam pobytu.

### Tarnowski akcent

Historia PNT i Hipotezy Riemanna trwa już ponad dwa wieki. Wśród wielu nazwisk znakomych matematyków, którzy pisali i piszą tę pasjonującą historię, są dwa związane z Krakowem i Tarnowem. W odniesieniu do PNT warto zwrócić uwagę na pracę [6], której autorem jest matematyk tarnowski. W odniesieniu do Hipotezy Riemanna krakowski akcent przedstawia się następująco. W drugiej połowie XIX wieku profesorem matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego był Franciszek Mertens. Jest on autorem hipotezy, zwaną *hipotezą Mertensa*, którą formuluje się tak. Dla liczby naturalnej  $k$  definiujemy (Möbius) liczbę  $\mu(k)$ , która przyjmuje wartość zero dla tych liczb naturalnych, które są podzielne przez kwadrat liczby pierwszej. Dla liczb bezkwadratowych  $\mu(k)$  jest równe  $+1$  lub  $-1$  w zależności od tego, czy liczba czynników pierwszych w rozkładzie  $k$  jest parzysta, czy nieparzysta. Funkcja Mertensa dana jest wzorem

$$M(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}, k \leq x} \mu(k).$$

Hipoteza Mertensa mówi, że dla każdego  $x$  zachodzi oszacowanie  $|M(x)| < \sqrt{x}$  i stosunkowo łatwo dowodzi się, że hipoteza Mertensa implikuje hipotezę Riemanna. Zrozumiałym jest, że hipoteza Mertensa budziła wielkie zainteresowanie. Sam Mertens sprawdził „ręcznie” jej prawdziwość dla  $x < 10^4$ . Przez dziesięciolecia znacząco powiększono wykładnik 4 i nie znaleziono do dziś numerycznego kontrprzykładu. Jednak hipoteza Mertensa okazała się nieprawdziwa. Udowodnili to w 1985 roku dwaj matematycy: Holender H. J. J. te Riele i Amerykanin A.M.Odlyzko. Dokładniej Andrew Odlyzko, czyli Andrzej Odłyżko. Urodzony w Tarnowie w 1949 roku. I to jest ten „tarnowski akcent”.

## Literatura

1. D. Goldfeld, The Elementary Proof of the Prime Number Theorem: An Historical Perspective, <https://people.math.osu.edu/nevai.1/AT/ERDOS/ErdosSelbergDispute.pdf>
2. H. L. Montgomery, S. Wagon, *The Mathematical Intelligencer*, 2006, **28:3**, 6-9.
3. A. M. Odlyzko, H. J. J. te Riele, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1985, **357**, 138-160.
4. C. Pommerance, *Mathematics of Computations*, 1979, **33**, 399-408.
5. Y. Zhang, *Annals of Mathematics*, 2014, **179**, 1121-1174.
6. M. Baran, *A Karamata method I. Elementary properties and applications*, *Canad. Math. Bull.* Vol. 34 (2), 1991, 147-157.





# Oddziaływanie dihydroksyacetonu (DHA) zawartego w samoopalaczach z ludzką skórą – badania spektroskopowe i teoretyczne

## The influence of dihydroxyacetone (DHA) contained in the self-tanning lotions with human skin – spectroscopic and theoretical studies

Wojciech Pietruś <sup>a,b</sup>, Rafał Kurczab <sup>a</sup>, Dariusz Latowski <sup>a,c,\*</sup>

<sup>a</sup>State Higher Vocational School in Tarnow, ul. Mickiewicza 8, 33-100 Tarnów, Poland

<sup>b</sup>Jagiellonian University, ul. Ingardena 3, 30-060 Kraków, Poland

<sup>c</sup>Jagiellonian University, ul. Gronostajowa 7, 30-387 Kraków, Poland

\*Corresponding author: [dariuszlatowski@gmail.com](mailto:dariuszlatowski@gmail.com)

---

### Streszczenie

Celem pracy było zbadanie wybranych właściwości ośmiu samoopalaczy różniących się konsystencją i zawartością dihydroksyacetonu (DHA). Badane bronzery podzielono na trzy grupy: płynne produkty samoopalające zawierające około 15% DHA, półpłynne samoopalacze (spryskiwacze lub pianki) oraz bronzery w postaci kremu. Produkty z tych dwóch ostatnich grup zawierały około 5% DHA. Badanie miało na celu sprawdzenie, czy samoopalacze są w stanie absorbować promieniowanie UV. Celem zastosowania spektroskopii w podczerwieni było zbadanie wpływu samoopalaczy na poziom nawilżenia skóry. W trakcie pracy wykonano obliczenia kwantowo-mechaniczne. Obliczenia dotyczyły komputerowego modelowania przepuszczalności DHA przez warstwę beta-keratyny skóry. Obliczono również energię wiązania wodorowego pomiędzy łańcuchami beta-keratyny oraz powierzchnię wykrystalizowanej formy beta-keratyny.

Wyniki badań wykazały, że DHA bardzo silnie absorbował promieniowanie UV-C, natomiast w mniejszym stopniu promieniowanie UV-B. Najmniejsza absorpcja została zarejestrowana w zakresie promieniowania UV-A. Płynne i częściowo półpłynne samoopalacze obniżyły poziom nawilżenia skóry, natomiast produkty w postaci kremu zawierały substancje nawilżające, które neutralizowały negatywny wpływ DHA na nawilżenie skóry. W badaniach *in silico* wykazano, że DHA nie przenika przez warstwę beta-keratyny skóry. Potencjalnymi przyczynami mogą być duże ilości energii wiązania wodorowych i naładowana powierzchnia beta-keratyny.

**Słowa kluczowe:** dihydroksyaceton, samoopalacze, skóra, modelowanie molekularne, FTIR, UV-VIS

## Abstract

The purpose of this study was to investigate selected properties of eight bronzers differing in consistency and dihydroxyacetone (DHA) content. The investigated bronzers were divided into three groups including: liquid sunless tanning products containing DHA level of about 15%, half-liquid self-tanners (spray or foam), and bronzers in the form of a cream. The products from the two latter groups contained about 5% DHA. This study inspected if self-tanners have the ability to absorb UV radiation. The aim of using infrared spectroscopy was to investigate the influence of self-tanners on skin moisture level. During the study, quantum-mechanical calculations were done. The calculations were related to computer-based modeling of DHA permeability through the beta-keratin layer of the skin. The calculations were also done to estimate hydrogen bond energy between chains of the beta-keratin as well as the surface of the crystallized beta-keratin surface.

The results indicated that DHA absorbed UV-C radiation very strong, whereas UV-B radiation was absorbed to a lower degree. The least absorbancy was discovered in the UV-A range. Liquid and, partly, half-liquid self-tanners reduced skin moisture; however, products in the form of cream contained moisturizing substances that neutralize the negative effect of DHA on skin hydration. In silico studies indicated that DHA does not permeate through the beta-keratin layer of the skin. Potential reasons for this may be the large energy of hydrogen bonds and charged beta-keratin surface.

**Key words:** dihydroxyacetone, sunless tanning, skin, molecular modeling, FTIR, UV-VIS

## Wstęp

Po wielu wiekach mody na jasną, chronioną przed promieniami słonecznymi cerę, w ostatnich kilkudziesięciu latach wyraźnie zaznaczył się trend w dążeniu do posiadania opalenizny. Obecnie jest ona kojarzona ze zdrowym i zapewniającym atrakcyjność stylem życia i pomimo wzrastającej świadomości szkodliwości promieniowania ultrafioletowego opalenizna nadal jest modna. Obecnie stosuje się trzy sposoby pozwalające uzyskać efekt opalenizny: korzystanie z naturalnego źródła promieniowania ultrafioletowego, jakim jest promieniowanie słoneczne, stosowanie sztucznych źródeł UV w postaci lamp solaryjnych oraz korzystanie z substancji chemicznych przyciemniających skórę [1].

Promieniowanie ultrafioletowe pochłaniane jest w większości przez chromofory komórkowe np. melaniny, które stanowią grupę barwników

produkowanych w melanosomach. Synteza barwników rozpoczyna się od oksydacji L-tyrozyny, która pod wpływem tyrozynazy (EC 1.14.18.1) utlenia się najpierw do L-dihydroksyfenyloalaniny (DOPA), a następnie przekształcana w dopachinon. Związek ten jest substratem do produkcji produktów pośrednich takich jak eumelaniny i feomelaniny, które następnie w wyniku wielu reakcji przekształcane są w melaniny. Końcowe produkty gromadzą się w keratynocytach, absorbują promieniowanie UV i dezaktywują reaktywne formy tlenu, dzięki czemu chronią przed szkodliwym działaniem zarówno promieniowania pochodzenia naturalnego jak i sztucznego [2]. Mimo to, wysoka dawka promieniowania słonecznego, szczególnie w zakresie wysokich energii może doprowadzić do obniżenia zdolności absorpcji kwantów światła oraz podrażnienia skóry. Częste opalenie przyspiesza proces starzenia się skóry (ang. *photoaging*), który powoduje wzrost grubo-

ści naskórka, przewlekłe stany zapalne, zaburzenia funkcji gruczołów łojowych oraz powstawanie zmarszczek. Intensywne promieniowanie może dodatkowo stanowić podstawę procesów kancerogenezy [3].

Wraz z rozwojem nauki wzrasta także świadomość na temat zagrożeń jakie niesie za sobą promieniowanie UV, co przyczynia się z kolei do intensyfikacji badań nad preparatami, które mogłyby zapewniać efekt opalenizny bez skutków ubocznych. Przełomem była praca Evy Wittgenstein, która w 1950 roku na uniwersytecie w Cincinnati badała dihydroksyaceton (DHA) jako potencjalny lek na glikogenezę (zaburzenie magazynowania glikogenu) u dzieci [4]. Dzieci otrzymywały duże dawki DHA doustnie i zaobserwowano, że związek ten po przypadkowym zetknięciu się ze skórą powodował powstawanie brązowych plam. W ten sposób DHA stał się pierwszym samoopalaczem dopuszczonym do zastosowania kosmetycznego. Pierwszy produkt został wyprodukowany przez Coppertone w 1960 roku, a dziesięć lat później związek zatwierdzono przez US Food and Drug Administration (FDA) jako dodatek samoopalający do leków i kosmetyków [5]. Dzisiaj DHA jest podstawowym składnikiem środków samoopalających. Jednak DHA ma właściwości mutagenne, gdyż reaguje z zasadami aminowymi budującymi DNA, więc ważne jest, aby jego stężenie poniżej naskórka było jak najniższe [5]. Dihydroksyaceton w kontakcie ze skórą reaguje z aminokwasami budującymi pierwszą warstwę skóry (*stratum corneum*). Reakcja ta jest procesem zbliżonym do reakcji Maillarda (tzw. nieenzymatycznego brązowienia), która znana jest jako reakcja brązowienia produktów spożywczych podczas smażenia. W wieloetapowej reakcji DHA z aminokwasami jej produktami są brązowe polimery – melanoïdyny. Struktura tych związków nie jest do końca poznana, lecz wiadomo, iż wykazują one podobieństwo do melaniny pod względem właściwości absorpcyjnych [6].

## Materiały i Metody

### Samoopalacze użyte w badaniach

Użyte w badaniach preparaty samoopalające zróżnicowano pod względem konsystencji i zawartości DHA. Ze względu na konsystencję podzielono je na trzy grupy:

- środki płynne (15% DHA) – dwóch różnych producentów określone jako próbka nr 1 i nr 2; stosowane są do opalania natryskowego, zostały dostarczone przez gabinet kosmetyczny;
- środki półpłynne (< 5% DHA) – w postaci płynnego aerozolu oraz pianki, która w kontakcie ze skórą zmienia konsystencję na płynną (firmy: L'oreal – Model93 oraz Sublime Bronze);
- kremy (< 5% DHA) – dostępne w dwóch formach: kremu lub mleczka brązującego (firmy: Startann, Dax, Sunozone oraz Dax z dodatkiem proszku przyspieszającego brązowienie).

Badano zdolności absorpcyjne samoopalaczy w zakresie promieniowania UV-VIS oraz ich wpływ na stopień uwodnienia skóry. W niniejszej pracy wykonano również symulacje przenikalności głównego składnika samoopalaczy – DHA przez wierzchnią warstwę naskórka (zbudowana głównie z beta-keratyny).

### Badanie właściwości spektralnych samoopalaczy

Celem badania było sprawdzenie właściwości fotoprotekcyjnych samoopalaczy w zakresie absorpcji promieniowa UV. W tym celu wybrano dwa produkty płynne oraz cztery kremy, które poddano pomiarom. Pomiary UV-VIS wykonano na spektrofotometrze firmy Jasco typ V-650. Widma rejestrowano w zakresie od 190 nm do 900 nm z rozdzielczością 1 nm. Próbkę płynną były umieszczane w kuwetach kwarcowych, a kremy i środki półpłynne na taśmie celofanowej. W celu zniwelowania błędów związanego z grubością warstwy nanoszonego kosmetyku dla każdej próbki wykonano po pięć niezależnych pomiarów.

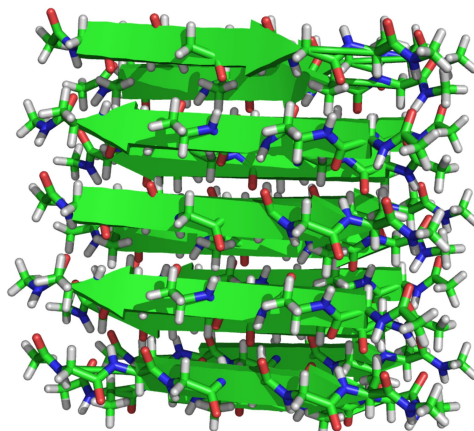
## Badanie wpływu środków samoopalających na stopień nawilżenia skóry

Pomiary wykonano na spektrofotometrze FT-IR Nicolet™ iS™5 firmy Thermo Scientific, stosując metodę osłabionego całkowitego odbicia w podczerwieni (ATR) z wykorzystaniem dziesięcio-odbiciowej przystawki wykonanej z selenku cynku (ZnSe). Badanie wpływu testowanych środków na skórę przeprowadzono dla wszystkich badanych kosmetyków. Pomiary wykonywano na wewnętrznej stronie przedramienia w zakresie wartości liczb falowych od  $650\text{ cm}^{-1}$  do  $4000\text{ cm}^{-1}$  z rozdzielczością  $2\text{ cm}^{-1}$ . Między pomiarami kolejnych kosmetyków stosowano 10-dniowe okresy przerwy wykluczające możliwość interakcji dwóch różnych środków. Pierwszy pomiar wykonano po około 1 minucie od nałożenia preparatu, a kolejny po sześciu godzinach. Otrzymane widma porównano z widmem skóry zarejestrowanym przed nałożeniem testowanego środka.

## Badanie przenikalności DHA przez warstwę beta-keratyny

Modelowanie komputerowe interakcji DHA i beta-keratyny wykonano przy użyciu następujących programów: MacMolPlt [7], AutoDock Vina [8], PyMOL [9]. Przy użyciu programu MacMolPlt narysowano cząsteczkę dihydroksyacetonu, a następnie zoptymalizowano jej geometrię przy użyciu programu Firefly [10, 11] metodą HF w bazie 6-31G. Z bazy danych DrugPort [12] pobrano plik z geometrią wykrystalizowanego fragmentu beta-keratyny (Rys. 1). Następnie w ADF Tool ustawiono rozmiary siatki (gridu) o wymiarze  $42 \times 22 \times 16\text{ \AA}$  i scentrowano ją na strukturze beta-keratyny. W programie AutoDock Vina wykonano dziesięć niezależnych dokowań cząsteczki DHA do powierzchni beta-keratyny i z otrzymanych rozwiązań wybrano optymalne kompleksy DHA–beta-keratyna. Analizę prowadzono przy założeniu, iż dokowanie DHA w warstwie beta-

-keratyny odbywa się w próżni a struktura beta-keratyny jest sztywna.



**Rysunek 1.** Struktura beta-keratyny. Wizualizacja utworzona przy użyciu programu PyMOL

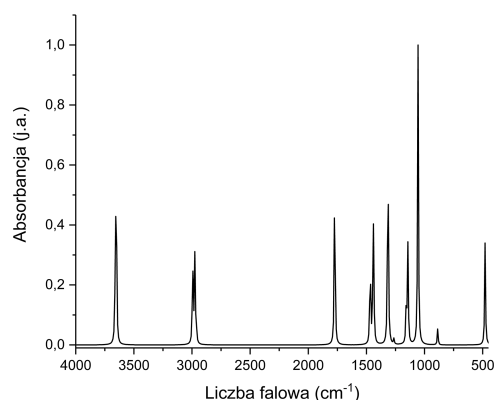
Aby sprawdzić możliwość przenikania DHA przez warstwę utworzoną przez beta-keratynę obliczono energię wiązań wodorowych między łańcuchami beta-keratyny. Używając bazy 6-31G utworzono plik do obliczenia energii układu dwóch łańcuchów przy użyciu programu Firefly. W ten sposób otrzymano energię kompleksu beta-keratyny ( $E_{\text{kompleksu}}$ ). Następnie wykonano obliczenia zamrożonych geometrii izolowanych aminokwasów wykorzystując tą samą bazę ( $E_{\text{aminokwas1}}$  i  $E_{\text{aminokwas2}}$ ). Energię wiązań wodorowych w kompleksie obliczono z równania:

$$\sum E_{\text{hbond}} = E_{\text{kompleksu}} - (E_{\text{aminokwas1}} + E_{\text{aminokwas2}}) \quad (1)$$

Następnie, aby obliczyć energię pojedynczego wiązania występującego w kompleksie białka otrzymany wynik podzielono przez ilość wiązań widocznych w strukturze dwóch łańcuchów użytych do obliczeń.

W celu zbadania, czy DHA ma możliwość przenikania przez strukturę beta-keratyny obliczono „wartość” powierzchni oraz rozkład ładunków wokół atomów przy użyciu programu PyMOL.

Metodami modelowania molekularnego opracowano również teoretyczne widmo DHA w podczerwieni (baza 6-31G), na którym widoczne są poszczególne drgania wiązań pochodzących od różnych grup chemicznych tego związku (Rys. 2).



**Rysunek 2.** Teoretyczne widmo monomeru dihydroksyacetonu

## Wyniki i Dyskusja

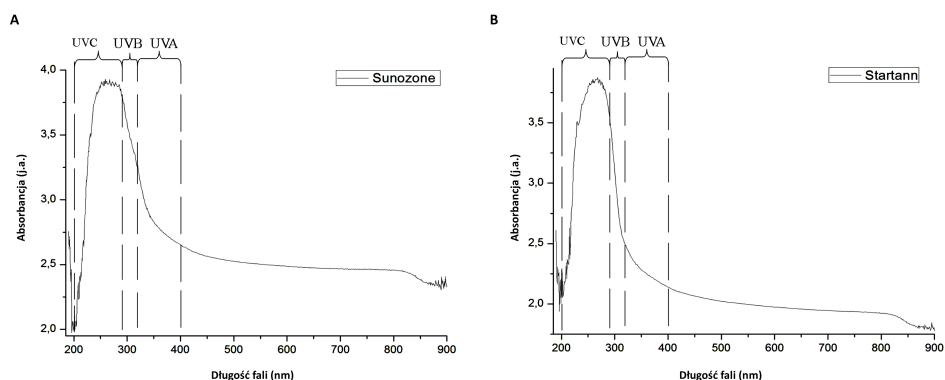
### Badanie właściwości spektralnych samoopalaczy

W celu zbadania właściwości spektralnych analizowanych środków brązujących, dla każdego z nich zarejestrowano widma UV-VIS w zakresie od 190 nm do 900 nm. W przypadku preparatów w formie kremów zaobserwowano wyraźne mak-

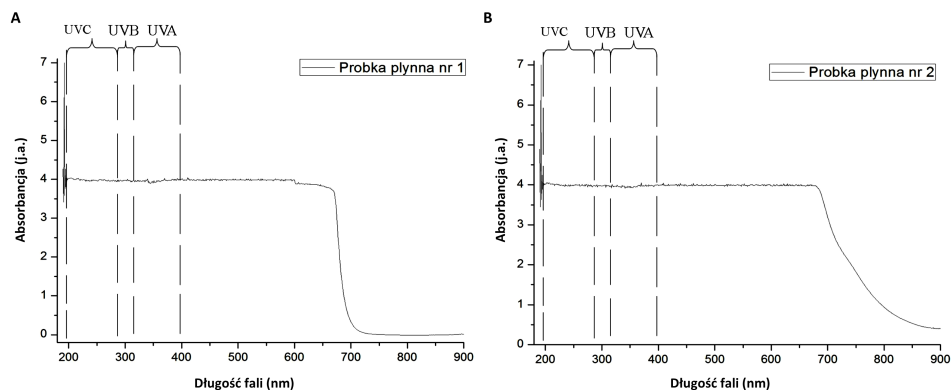
simum absorpcji przy długości fali 270 nm (Rys. 3).

Wspomniana długość fali mieści się w zakresie promieniowania UV-C (200-290 nm). Po osiągnięciu maksymalnej absorbancji następuje jej gwałtowny spadek do około 330 nm. Dalej aż do około 800 nm (daleka „czerwień”) absorbancja utrzymuje się na niemal stałym, ale niskim poziomie. Preparaty te absorbują promieniowanie ultrafioletowe głównie w zakresie UV-B (290-320 nm) i UV-C (200-290 nm). Absorbancja UV-A (320-400 nm) jest zauważalna i, choć większa niż światła widzialnego, to jednak najniższa z wszystkich zakresów UV.

Natomiast, widma próbek płynnych nr 1 i 2 wykazują podobieństwo między sobą i równie istotne różnice w stosunku do innych preparatów (Rys. 4A i 4B). Na obu widmach nie można zaobserwować wyraźnego maksimum absorpcji. Jednakże, największa wartość absorbancji (4 [j.a.]) utrzymuje się na stałym poziomie, odpowiadającym długości fali od 200 nm do 700 nm. Wspomniany zakres długości fali odpowiada promieniowaniu ultrafioletowemu (UV-A, UV-B, UV-C) włącznie z „bliską czerwiecią” (600-700 nm). Wskazuje to na szeroki zakres filtrujący badanych preparatów względem szkodliwego promieniowania UV. Po przekroczeniu długości fali równej 700 nm, wartość absorbancji ulega drastycznemu zmniejszeniu.



**Rysunek 3.** Widmo absorpcyjne UV-VIS produktu A) Sunozone oraz B) Startann



**Rysunek 4.** Widmo absorpcyjne UV-VIS produktu A) płynnego nr 1 B) płynnego nr 2

### Badanie wpływu środków samoopalających na stopień nawilżenia skóry

Na Rysunkach 5-10 przedstawiono porównanie widm FT-IR czystej skóry z widmami: otrzymanym minutę po nałożeniu oraz po sześciu godzinach od nałożenia samoopalacza.

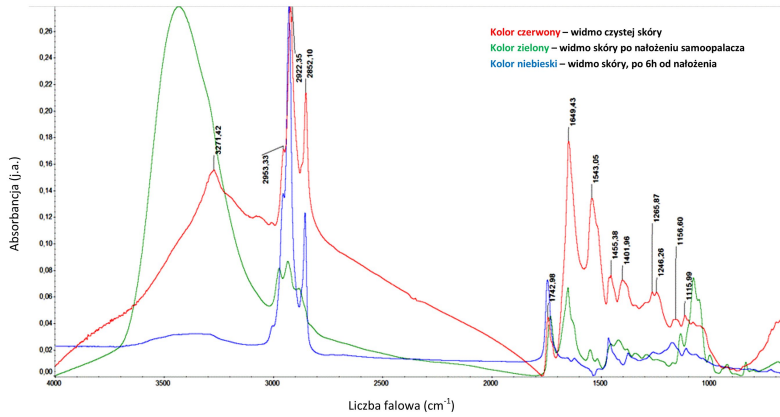
#### Płynne środki brązujące o stężeniu DHA 15%

Po aplikacji samoopalacza w formie płynnej, zaobserwowano wzrost intensywności pasma przy liczbie falowej  $= 3271 \text{ cm}^{-1}$ , co wiąże się z pojawieniem grup hydroksylowych zawartych w DHA (Rys. 5). Po upływie sześciu godzin od nałożenia próbki, intensywność tych pasm w znaczny sposób uległa obniżeniu, co oznacza, że ilość grup  $-\text{OH}$  z czasem ulega zmniejszeniu. Można to uznać za negatywny wpływ badanych samoopalaczy na stopień nawilżenia skóry. W widmie teoretycznym (Rys. 2) szczyt od grup wodorotlenowych znajduje się powyżej  $4000 \text{ cm}^{-1}$  jednak monomery DHA mogą łączyć się ze sobą w dimery za pomocą wewnątrzcząsteczkowych wiązań wodorowych [13], co powoduje przesunięcie pasma w kierunku fal o mniejszej długości. Widoczne pasma poniżej  $v = 3000 \text{ cm}^{-1}$  odpowiedzialne są za drgania atomów węgla o hybrydyzacji  $\text{sp}^3$  (drgania w tłuszczach) również wykazują spore różnice [14]. Po nało-

żeniu preparatu, wartości absorbancji tych pasm zmniejszają się, co może być skutkiem „przykrycia” warstwy lipidów znajdujących się na skórze przez samoopalacz. Tak duże zmiany struktury widma mogą wyjaśniać przyczyny wysuszenia skóry. Związki zawarte w samoopalaczach mogą także powodować niedrożność gruczołów potowych, które nie mogą wydzielać potu i łoju, co może powodować zmniejszenie intensywności omawianych pasm (Rys. 5).

#### Półpłynne środki brązujące o stężeniu DHA <5%

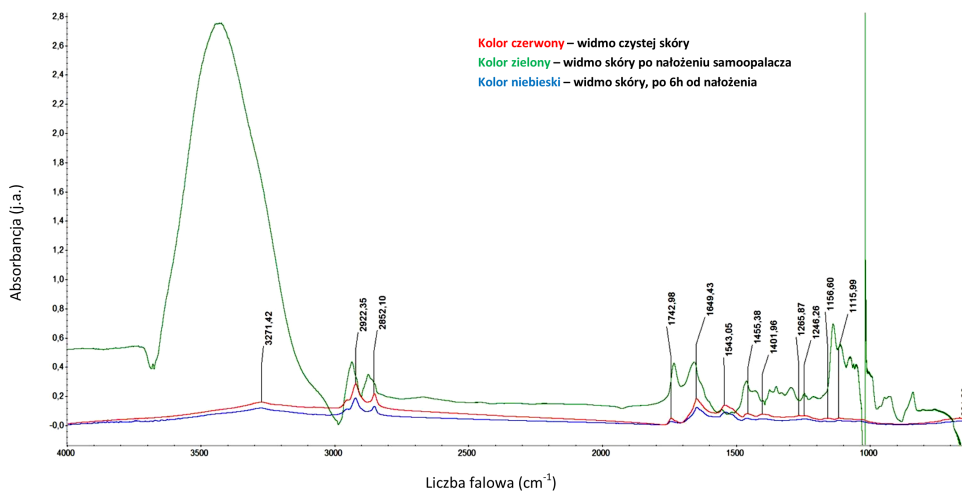
W zależności od konsystencji, środki półpłynne wykazują różny wpływ na stopień nawilżenia skóry. Może to być spowodowane rodzajem substancji znajdujących się w składzie produktów. W produkcie L'oreal – *model93* dostępnym w formie pianki, widoczny jest znaczny wzrost intensywności pasm pochodzących od drgań grup wodorotlenowych (Rys. 6), co można powiązać z obecnością DHA oraz innych substancji zawierających grupę  $-\text{OH}$  w badanym kosmetyku. W drugim produkcie firmy L'oreal – *Sublime Bronze* (Rys. 7), w formie aerozolu, widać wyraźne pasmo drgań grupy  $-\text{OH}$ , występującej w monomerycznej formie DHA [13]. Po sześciu godzinach kosmetyk w formie pianki zmniejsza jednak stopień nawilżenia skóry, a w formie aerozolu



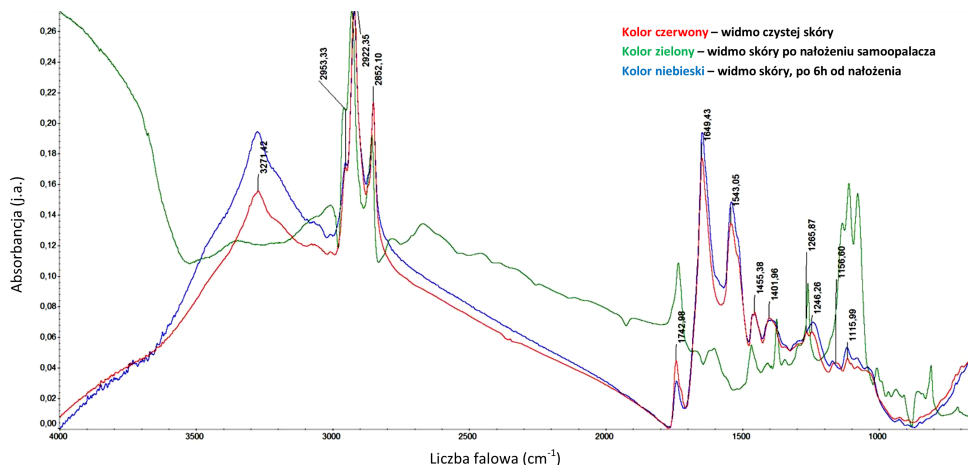
**Rysunek 5.** Porównanie widma czystej skóry (czerwony) z widmami zarejestrowanymi minutę (zielony) oraz 6 godzin (niebieski) po nałożeniu próbki płynnej I

nieznacznie podnosi poziom wartości absorbancji pasm odpowiedzialnych za drgania grup –OH. Kosmetyk *Sublime Bronze*, dostępny w formie aorezolu zmienia strukturę pasm leżących w rejonie *fingerprintu*. W znaczny sposób wzrasta intensywność pasma przy liczbie falowej =1742cm<sup>-1</sup> pochodzące od drgań w grupie karbonylowej C=O, co może być wynikiem długoterminowego przechowywania tego kosmetyku i pojawieniem się

aldehydu pirogronowego lub glicerynowego [6]. Kolejne pasma (1600-1080 cm<sup>-1</sup>) pochodzące od drgań rozciągających C-N oraz zginających N-H w aminach zanikają co może być skutkiem reakcji DHA z powierzchnią skóry [14]. Po upływie sześciu godzin kształt widma naskórka przypomina jego stan sprzed eksperymentu, lecz wartości absorbancji są nieznacznie zmienione.



**Rysunek 6.** Porównanie widma czystej skóry (czerwony) z widmami zarejestrowanymi minutę (zielony) oraz 6 godzin (niebieski) po nałożeniu produktu L'oreal – model93

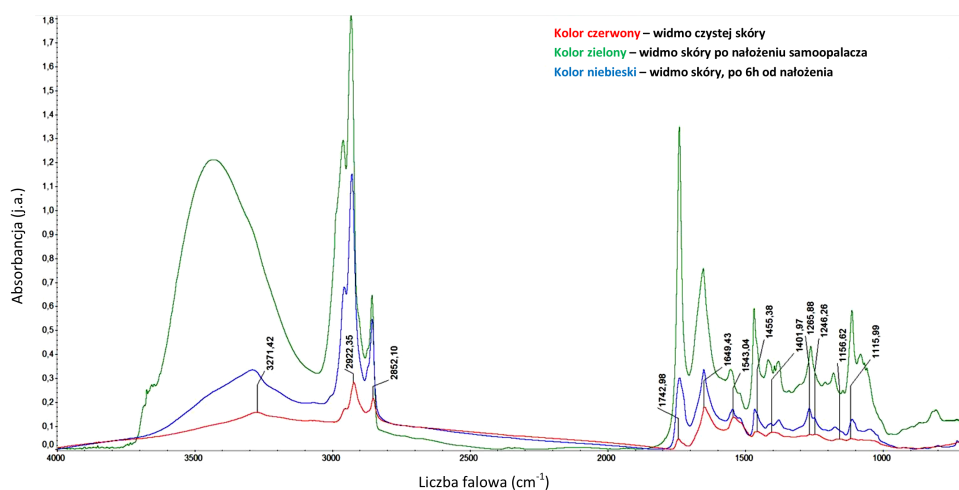


**Rysunek 7.** Porównanie widma czystej skóry (czerwony) z widmami zarejestrowanymi minutę (zielony) oraz 6 godzin (niebieski) po nałożeniu produktu L'oreal – Sublime Bronze

## Kremy

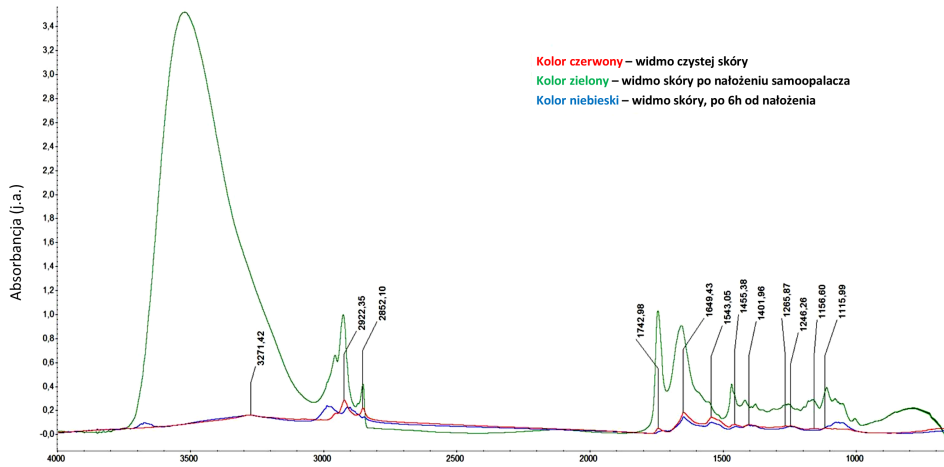
W przypadku wszystkich badanych kremów samoopalających, tuż po ich nałożeniu intensywność pasma pochodzącego od drgań  $\text{-OH}$  ulega znacznemu wzmocnieniu, co może wiązać się z pojawieniem grup hydroksylowych (Rys. 8-10) pochodzących z wody, gliceryny lub innych alkoholi. Widmo FT-IR naskórka zarejestrowane

po sześciu godzinach wykazało wyższą wartość absorbancji tego pasma, co można powiązać ze zwiększonym nawilżeniem, niż w przypadku czystej skóry. Efekt ten jest możliwy, dzięki obecności w kremach np. palmitynianu izopropylu, który ma działanie zapobiegające nadmiernemu odparowywaniu wody [15]. Intensywności pasm, które występują poniżej  $3000\text{ cm}^{-1}$  odpowiedzialnych za drgania atomów węgla o hybrydyzacji  $\text{sp}^3$



**Rysunek 8.** Porównanie widma czystej skóry (czerwony) z widmami zarejestrowanymi minutę (zielony) oraz 6 godzin (niebieski) po nałożeniu produktu Sunzone

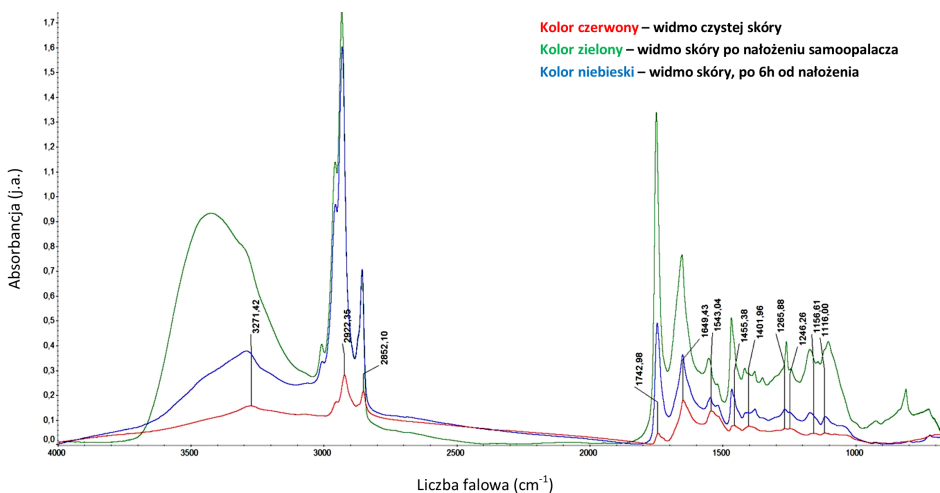




**Rysunek 9.** Porównanie widma czystej skóry (czerwony) z widmami zarejestrowanymi minutę (zielony) oraz 6 godzin (niebieski) po nałożeniu produktu Dax

w tłuszczach [16], tuż po nałożeniu badanych kremów znacząco się zwiększają [14]. Preparaty te tworzą układ typu woda-olej oraz zawierają wiele innych substancji natłuszczających skórę. Pomiar wykonany po sześciu godzinach od nałożenia również wskazuje na natłuszczenie skóry, gdyż intensywności tych pasm są wzmożone w porównaniu z intensywnością pasm w widmie czy-

stej skóry. W widmach zmierzonych po upływie sześciu godzin widoczne jest zmniejszenie intensywności pasm ( $1543\text{ cm}^{-1}$ ) odpowiadających za drgania (zginające N-H) występujące w aminach drugorzędowych [14]. Może być to wynikiem reakcji Maillarda, gdzie DHA reaguje z aminokwasami, zmniejszając ilość wolnych grup aminowych [17].

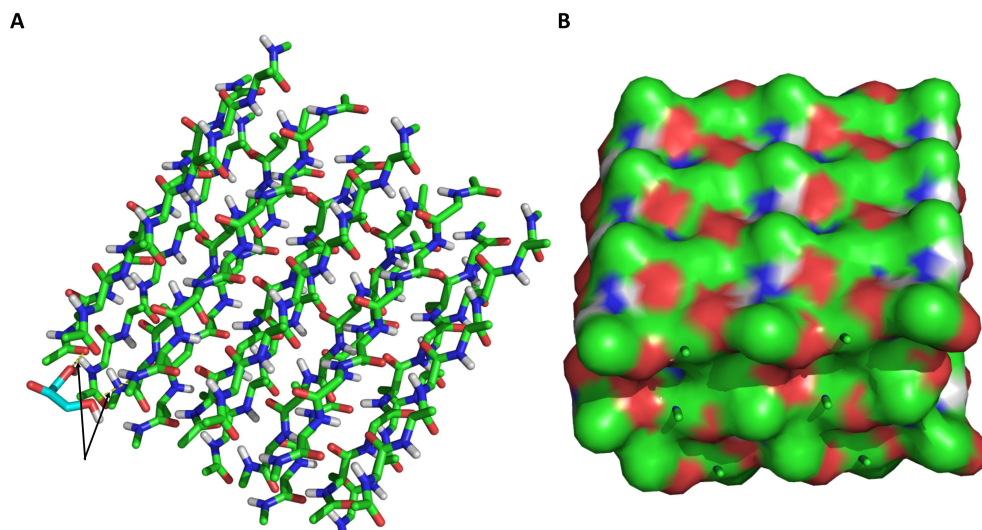


**Rysunek 10.** Porównanie widma czystej skóry (czerwony) z widmami zarejestrowanymi minutę (zielony) oraz 6 godzin (niebieski) po nałożeniu produktu Startann

## Modelowanie przenikalności DHA przez naskórek

Wyniki symulacji wiązania cząsteczki DHA z powierzchnią beta-keratyny przedstawiono na Rysunku 11A. Zarówno przy najlepszym jak i najgorszym dopasowaniu energetycznym oddziaływania DHA z powierzchnią beta-keratyny widać, że DHA nie penetruje do środka struktury beta-keratyny, lecz wiąże się z powierzchnią za pomocą sieci wiązań wodorowych.

su była równa  $-267554,17$  kcal/mol a energia pojedynczego monomeru beta-keratyny  $-133758,07$  kcal/mol. Korzystając ze wzoru (1) otrzymano sumaryczną wartość energii wiązań wodorowych występujących między monomerami równą  $-38,03$  kcal/mol (energia sześciu wiązań wodorowych), co w przeliczeniu na jedno wiązanie wodorowe daje wartość  $-6,34$  kcal/mol.

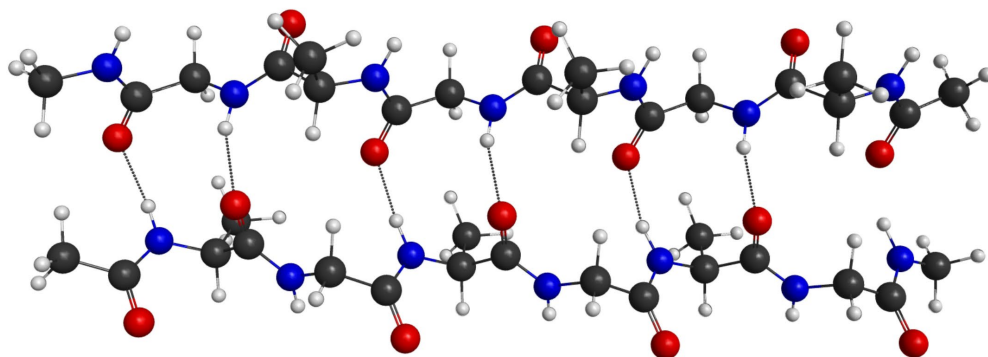


**Rysunek 11.** A) Najbardziej korzystne energetycznie dokowanie DHA do struktury beta-keratyny ( $-2,3$  kcal/mol); cząsteczka DHA (niebieski) struktura beta-keratyny (zielony), czarne strzałki oznaczają wiązania wodorowe, B) struktura powierzchni molekularna beta-keratyny uzyskana przy użyciu programu PyMOL

Za pomocą programu PyMOL wykonano wizualizację struktury powierzchni molekularnej beta-keratyny (Rys. 11B), która okazuje się bardzo regularna i zwarta. Czerwone obszary (bogatsze w elektrony) na jej powierzchni oraz obszary niebieskie (ubogie w elektrony) wskazują, że powierzchnia beta-keratyny charakteryzuje się obszarami o różnym potencjale elektrostatycznym.

Do dalszych obliczeń kwantowo-mechanicznych wycięto dwa łańcuchy beta-keratyny połączone międzycząsteczkowymi wiązaniami wodorowymi. Otrzymana energia komplek-

Teoretycznie po rozerwaniu tych wiązań cząsteczka DHA mogłaby przekroczyć zewnętrzną warstwę naskórka i dalej wnikać do głębszych warstw skóry. Cząsteczka DHA oddziałuje tylko z grupami amidowymi glicyny i alaniny na powierzchni beta-keratyny, dlatego samoopalacze barwią tylko wierzchnią warstwę skóry i są szybko usuwane wraz z martwym naskórkiem. Donosi się jednak, że DHA w szczątkowych ilościach może przenikać do głębszych warstw skóry [18]. Na podstawie otrzymanych wyników symulacji można zasugerować, że drogą, którą DHA może



**Rysunek 12.** Geometria dwóch łańcuchów beta-keratyny z widocznymi wiązaniami wodorowymi utworzonymi między atomami tlenu grup karbonylowych z atomami wodoru grup aminowych

wnikać w głąb skóry nie jest prawdopodobnie przechodzenie przez barierę beta-keratyny. Aczkolwiek należy zaznaczyć, iż dokowanie molekularne nie uwzględnia fleksyjności makrocząsteczki, co może być potencjalnym źródłem błędnych wyników symulacji. Jest więc wysoce prawdopodobne, że cząsteczki DHA mogą przeniknąć w głębsze rejony skóry przez tzw. przydatki skóry, takie jak zakończenia gruczołów potowych lub mieszków włosowych, które są przerwaniami bariery ochronnej.

## Podsumowanie

Celem niniejszej pracy była charakterystyka wybranych środków brązujących pod kątem ich wpływu na skórę. W trakcie badań przeanalizowano osiem produktów, które podzielono na trzy grupy: środki płynne, środki półpłynne i kremy. Jako metody badawcze użyto spektroskopii UV-VIS, FT-IR oraz modelowania molekularnego.

Na podstawie badań z użyciem spektroskopii UV-VIS określano zakres absorpcji promieniowania UV przez środki płynne i kremowe. Analiza wykazała, że zarówno te pierwsze jak i drugie wykazują absorpcję w różnych zakresach promieniowania UV oraz posiadają wskaźnik ochrony przeciwsłonecznej (SPF) wynoszący około 3, przy

czym trzeba zaznaczyć, że produkty reakcji Maillarda (reakcja DHA z naskórkiem) – melanoidyny posiadają wskaźnik SPF > 18 [19]. Na podstawie uzyskanych wyników można zasugerować, że preparaty samoopalające nie powinny być stosowane jako środki ochrony przeciwsłonecznej.

Przy użyciu spektroskopii FT-IR monitorowano wpływ samoopalaczy na stopień nawilżenia skóry. Środki płynne negatywnie wpływały na stopień uwodnienia skóry. Ponadto, powodowały czasową modyfikację powierzchni naskórka poprzez wpływ na warstwę lipidów znajdujących się na skórze. Zmiany te mogą w znacznym stopniu uwrażliwić skórę na działanie niebezpiecznych czynników zewnętrznych takich jak drobnoustroje, promieniowanie słoneczne. Środki półpłynne działały dwukierunkowo tzn. w zależności od konsystencji preparatu (aerazol lub pianka) wysuszały lub nawilżały powierzchnię skóry nie zmieniając struktury naskórka. Natomiast środki kremowe, dzięki zawartym substancjom w swoim składzie powodowały nawilżenie skóry. Stosowanie środków półpłynnych i kremowych nie pozbawia skóry ochronnego płaszcza lipidowego.

Przenikalność DHA przez warstwę beta-keratyny budującą naskórek analizowana była metodami *in silico*. Analiza dokowania molekularnego do sztywnej struktury beta-keratyny wykazała, iż cząsteczka DHA nie przenika przez warstwę bu-

dującą naskórek, gdyż wiąże się z powierzchnią tej struktury nie wnikając w głębsze jej warstwy. Struktura beta-keratyny utrzymywana jest przez sieć wiązań wodorowych (każde w przybliżeniu ma energię równą -6,34 kcal/mol), co powoduje, że przenikanie DHA do głębszych warstw skóry jest utrudnione.

Firmy kosmetyczne wciąż badają nowe połączenia różnych substancji czynnych w produkcji środków samoopalających, aby samoopalacze były coraz bardziej skuteczne. Należy jednak pamiętać, że najważniejszym aspektem stosowania samoopalaczy pozostaje zdrowie ich użytkowników. Powyższa praca zwraca uwagę na istotność problemu i wskazuje konieczność prowadzenia dalszych i coraz bardziej wnikliwych analiz tego tematu.

## Literatura

1. D. Sarnoff, *The Skin Cancer Foundation Journal - Beauty*, 2010, 18-23.
2. A. Altiner and A. Quintana, *The Skin Cancer Foundation Journal*, 2010, 23-25.
3. G. J. Fisher, S. Kang, J. Varani, Z. Bata-Csorgo, Y. Wan, S. Datta and J. J. Voorhees, *Archives of Dermatology* 2002, **138**, 1462-70.
4. E. Wittgenstein and H. K. Berry, *American Association for the Advancement of Science*, 1960, **132**, 894-895.
5. A. B. Petersen, H. C. Wulf, R. Gniadecki and B. Gajkowska, *Mutation Research – Genetic Toxicology and Environmental Mutagenesis*, 2004, **560**, 173-186.
6. R. K. Chaudhuri, *Surfactants in Personal Care Products and Decorative Cosmetics*, L. D. Rhein, M. Schlossman, A. O'Lenick and P. Samosundaran, CRC Press, 3th edn, 2007, pp. 326-337.
7. B. M. Bode and M. S. Gordon, *Journal of Molecular Graphics and Modelling*, 1998, **16**, 133-138.
8. O. Trott, and A. J. Olson, *Journal of computational chemistry*, 2010, **31**, 2967-2970.
9. The PyMOL Molecular Graphics System, Version 1.8 Schrödinger, LLC.
10. M. W. Schmidt, K. K. Baldrige, J. A. Boatz, S. T. Elbert, M. S. Gordon, J. H. Jensen, S. Koseki, N. Matsunaga, K. A. Nguyen, S. Su, T. L. Windus, M. Dupuis and J. A. Montgomery, *Journal of Computational Chemistry*, 1993, **14**, 1347-1363.
11. A. A. Granovsky, Firefly, version 8, 2017.
12. J. J. Faith, M. E. Driscoll, V. A. Fusaro, E. J. Cosgrove, B. Hayete, F. S. Juhn, S. J. Schneider and T. S. Gardner, *Nucleic Acids Research*, 2008, **36**, 866-870.
13. K. Ślepokura and T. Lis, *Carbohydrate Research*, 2004, **339**, 1995-2007.
14. B. Wojtkowiak and M. Chabanel, *Spektroskopia molekularna*, PWN Warszawa 1984.
15. US Pat., US 5409706 A, 1991.
16. B. Zimmermann, 2016, *Mljekarstvo* **64**, 94-101.
17. M. C. Thomas and J. Forbes, *Interface between Aging*, from *Maillard Reaction I*-ed. Royal Society of Chemistry publishing, 2010 pp. 1-11.
18. G. Mark and A. Gitika, <http://abcnews.go.com/Health/safety-popular-spray-tans-question-protected/story?id=16542918&singlePage=true>. 2012 [04.02.2017].
19. R. M. Fusaro and E. G. Rice, *Annals of the New York Academy of Sciences*, 2005, **1043**, 174-183.

# Wpływ odchyień napięcia sieci energetycznej na sprawność silników indukcyjnych

Tomasz Kołacz<sup>a</sup>, Marcin Piekieniak<sup>a</sup>, Jerzy Skwarczyński<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Tarnowie, ul. Mickiewicza 8, 33-100 Tarnów, Polska

\*Corresponding author: j\_skw@pwsztar.edu.pl

---

## Streszczenie

Celem pracy było wykonanie pomiarów laboratoryjnych dla określenia wpływu wartości napięcia zasilającego na sprawność silnika indukcyjnego. Obiektem badanym był silnik indukcyjny pierścieniowy małej mocy w warunkach stałego obciążenia. Wyniki zostały przedstawione w formie wykresów.

**Słowa kluczowe:** sprawność silnika indukcyjnego, odchylenia napięcia, straty poszczególne

## Abstract

The objective of the research was to perform laboratory measurements to determine the impact of supply voltage to the efficiency of the induction motor. The object of the tests was the low power slip-ring induction motor working under the constant load conditions. The results have been presented in the form of graphs.

**Key words:** efficiency of an induction motor, supply voltage variations, specified losses

---

## Wstęp

Wśród wskaźników jakości energii elektrycznej wymienia się odchylenia wartości skutecznej napięcia od poziomu znamionowego. Zmiany wartości napięcia zasilającego urządzenia elektryczne powodują szereg ujemnych skutków o charakterze techniczno-technologicznym i ergonomicznym. W sferze produkcyjnej jedne i drugie wywołują dodatkowe koszty [1]. Spośród urządzeń szczególnie wrażliwych na skutki wahań napięcia wymienia się silniki indukcyjne, w których produkowany moment zależy od kwadratu napięcia zasilającego. Ponieważ silników tych ilościowo

jest najwięcej, podejrzewa się, że koszty spowodowane zmniejszeniem sprawności silników na skutek niewłaściwego poziomu napięcia zasilającego mogą być znaczące. W literaturze trudno jednak odnaleźć wyczerpujące informacje o zależności sprawności maszyn indukcyjnych od wartości napięcia zasilającego, a także o wpływie stopnia obciążenia silnika na tę zależność. Próba udzielenia odpowiedzi na te pytania była tematem podjętych prac dyplomowych [6], przy czym pierwszym etapem było wykonanie odpowiednich pomiarów laboratoryjnych. Obiektem badanym był silnik indukcyjny pierścieniowy małej mocy.

## Wybór metody pomiarowej

Zgodnie z zaleceniami norm, sprawność silników indukcyjnych małej mocy powinna być wyznaczana, ewentualnie sprawdzana, metodą bezpośredniego obciążenia. W tabeli 1 przedstawiono wyniki dwóch pomiarów silnika 1,3kW, obciążonego w przybliżeniu znamionowo maszyną komutatorową prądu stałego podwójnie łożyskowaną. Moment reakcji stojana maszyny obciążającej mierzony był za pomocą wagi elektronicznej (pomiar 1) oraz wagi mechanicznej (pomiar 2). Straty w rdzeniu stojana zostały wyznaczone oddzielnym pomiarem wykonanym w warunkach biegu jałowego.

W obu przypadkach stwierdzono trudności w bilansowaniu ok. 7% mocy czynnej. Nie można wykluczyć, że wartość tą zmniejszyło by użycie dokładniejszych metod pomiarowych, np. wykorzystanie momentomierza o małej niepewności pomiaru, dokładniejsza kontrola rezystancji uzwojeń w trakcie wykonywania badań, a także bardziej szczegółowa analiza reprezentatywnej rezystancji przejścia szczotki-pierścienie. Wiadomo jednak, że w większości maszyn występują w różnym stopniu zjawiska nie uwzględniane podczas projektowania, powodujące wydzielanie się ciepła w elementach konstrukcyjnych maszyny. Straty z tym związane obejmuje się ogólnie nazwą dodatkowych. Ich uzależnienie od napię-

**Tabela 1.** Pomiary strat i sprawności metodą bezpośredniego obciążenia

	Dane producenta (wartości znamionowe)	Pomiar 1 (wartości względne)	Pomiar 2 (wartości względne)
napięcie $U_s$	$U_{sn} = 400V$	0,998	1,003
prąd stojana $I_s$	$I_{sn} = 3,3A$	0,993	0,95
poślizg $s$	$s_n = 0,127$	0,141	0,132
moc pobierana $P_{pob}$	1874,8W (1,44 $P_n$ )	1,463	1,409
cosφ	$\cos\varphi_n = 0,82$	0,84	0,844
prąd wirnika $I_w$	$I_{wn} = 23,2A$	1,267	1,2
moment $T_{ucyf}$	$T_n = 9,48Nm$	1,05	1,03
moc wydawana $P_{wyd}$	$P_n = 1300W$	1,033	1,023
Sprawność $\eta$	$\eta_n = 0,693$	0,706	0,726
straty w uzwojeniach stojana $P_{dCus}$	176,4W (0,136 $P_n$ )	0,134	0,122
straty w rdzeniu stojana $P_{dFes}$		0,036	0,025
straty w uzwojeniach wirnika $P_{dCuw}$	75W	0,177	0,159
straty w rdzeniu wirnika $P_{dFew}$		0,0015	0,001
straty podstawowe (Cu+Fe) $P_{dpodst}$		0,349	0,306
straty całkowite $P_{dc} = P_{pob} - P_{wyd}$	574,8W (0,44 $P_n$ )	0,43	0,386
straty dodatkowe $P_{ddod} = P_{dc} - P_{dpodst}$		0,081	0,0795
straty mechaniczne $P_{dmech} < 0,01P_n$		ok. 0,009	ok. 0,009
straty nieokreślonych źródeł $P_{dmok}$		ok. 0,07	ok. 0,07

cia, prądów oraz prędkości obrotowej bywa zwykle trudne, a ich przyczyny często są różne. Celem podjętych badań było przede wszystkim ustalenie zależności od napięcia tej dominującej części strat, które występują w każdej maszynie. Dlatego zrezygnowano z pomiaru strat i sprawności metodą bezpośredniego obciążenia, wybierając metodę strat poszczególnych.

Moment elektromagnetyczny wytwarzany w silniku indukcyjnym zależy od kwadratu napięć zasilających. Obniżenie wartości skutecznej napięcia zasilającego silnik obciążony powoduje zwiększenie poślizgu, wzrost prądów oraz wzrost strat w uzwojeniach. Równocześnie jednak zmniejszają się straty w rdzeniu stojana, przy czym ich zależność od napięcia zasilającego jest w przybliżeniu kwadratowa. Wzrost napięcia powoduje efekt odwrotny, ale równocześnie wzrasta nasycenie rdzenia. W sumie, w zależności od relacji pomiędzy stratami w uzwojeniach i rdzeniu, od obciążenia maszyny oraz położenia na krzywej magnesowania indukcji w znamionowym punkcie pracy, wpływy napięcia na zmiany strat mogą być różne, ale także niewielkie. Dlatego dla ich oceny wybrano przejrzystą metodę strat poszczególnych, ograniczając się do rozpatrywania strat podstawowych, tj. w uzwojeniach i rdzeniu, których uwarunkowania w różnych maszynach są podobne.

Zgodnie z takim podejściem mierzone były jedynie dostępne pomiarowo wielkości elektryczne, tzn. napięcia na uzwojeniach stojana oraz prądy uzwojeń wirnika i stojana. Moc odpowiadająca wytwarzanemu momentowi elektromagnetycznemu  $T_e$  była obliczana przez odjęcie mocy strat podstawowych od mocy pobieranej z sieci:

$$\omega_m T_e = P_e = P_{pob} - P_{dpodst} \quad (1)$$

$$P_{dpodst} = P_{dCus} + P_{dFes} + P_{dCuw} + P_{dFew} \quad (2)$$

gdzie:

$P_{dpodst}$  – straty podstawowe,

$P_{dCus}, P_{dFes}$  – straty w uzwojeniach i rdzeniu stojana,

$P_{dCuw}, P_{dFew}$  – straty w uzwojeniach i rdzeniu wirnika,

$\omega_m$  – prędkość kątowna wirnika,

$P_{pob}$  – moc pobierana.

Jako moc użyteczną ( $P_{wyd}$ ) traktowano moc  $P_e$  pomniejszoną o straty mechaniczne  $P_{dmech}$ :

$$P_{wyd} = P_e - P_{dmech} \quad (3)$$

Moment użyteczny (napędowy, „na wale”) odpowiada mocy wydawanej:

$$P_{wyd} = \omega_m T_{uzyt} \quad (4)$$

Ewentualne straty dodatkowe  $P_{ddod}$  wydzielane w elementach konstrukcyjnych pomniejszą strumień mocy  $P_e$  przetwarzanej na mechaniczną, co powinno być uwzględnione przez odpowiednie uzupełnienie wzoru (1). W ramach tego etapu pracy nie było to jednak robione, więc straty całkowite jako różnica mocy pobieranej i wydawanej obejmują jedynie straty podstawowe i mechaniczne:

$$P_{dc} = P_{pob} - P_{wyd} = P_{dpodst} + P_{dmech} \quad (5)$$

Sprawność jest ilorazem mocy wydawanej i pobieranej:

$$\eta = \frac{P_{wyd}}{P_{pob}} \quad (6)$$

Wpływ napięcia na straty i sprawność powinno się rozpatrywać w warunkach obciążenia silnika stałym momentem, lub stałą mocą, ponieważ oba rodzaje pracy mają miejsce w praktyce.

## Realizacja pomiarów

Pomiar wielkości elektrycznych był dokonywany metodami cyfrowymi z zastosowaniem separatorów LEM i przetworników A/C. Częstotliwość próbkowania wynosiła 5kHz. Moc czynną pobieraną przez silnik obliczano jako wartością średnią mocy chwilowej pobieranej przez poszczególne fazy:

$$P_{pob} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=1}^3 \int_0^{T_s} u_k(t) i_k(t) dt \quad (7)$$

Operację całkowania zastępowano sumowaniem iloczynów próbek napięcia i prądu. Moc czynna wydzielana na rezystancjach uzwojeń stojana i obwodów wirnika obliczana była z tego samego wzoru, z uwzględnieniem związku  $u_k(t) = R_k i_k(t)$ . Pomiaru wykonywano na maszynie nagrzananej, kontrolując dodatkowo wartość rezystancji przed i po każdym pomiarze.

Wartość zastępczą rezystancji wirnika przyjęto na podstawie pomiaru metodą techniczną rezystancji obwodu utworzonego z dwóch uzwojeń wirnika oraz pary zestyków pierścieni-szczotka zasilonych prądem stałym o wartości ok.  $0,6 I_{wn}$ , przy obracającym się wirniku.

Straty w rdzeniu stojana, określone w warunkach stanu jałowego w sposób ogólnie stosowany [2], uzależniono od kwadratu wewnętrznej sem  $E_s$ . Była ona obliczana dla każdego punktu pomiarowego, zgodnie ze schematem zastępczym ze wzoru:

$$E_s = U_{sf} \left| \frac{Z_r}{Z_z} \right|; \quad Z_z = R_s + jX_{os} + \frac{jX_\mu Z_r}{jX_\mu + Z_r}; \quad Z_r = \frac{R'_w}{s} + jX'_{\sigma w} \quad (8)$$

w którym:

$U_{sf}$  – napięcie zasilające silnika, fazowe, wartość skuteczna,  
 $s$  – poślizg,

$R_s, R'_w, X_{os}, X'_{\sigma w}, X_\mu$  – parametry schematu za-

stępczego silnika.

Straty w rdzeniu wirnika szacowano wg [3] zakładając, że powierzchnia przekroju poprzecznego jarzma wirnika do powierzchni jarzma stojana wynosi 2/3:

$$P_{dFew} \approx P_{dFes} \frac{2}{3} \left( \frac{f_w}{f_s} \right)^{4/3} = \frac{2}{3} P_{dFes} s^{4/3} \quad (9)$$

Straty mechaniczne są funkcją, między innymi prędkości obrotowej. Ponieważ zmiany tej prędkości przy zmianach obciążenia i napięcia nie były wielkie, na podstawie pomiaru w stanie biegu jałowego przyjęto straty mechaniczne zespołu

$$P_{dmech} \approx const \approx 0,009 P_n.$$

Przy wyznaczaniu poślizgu silnika wspomagało się szybką transformatą Fouriera (FFT) określając częstotliwość podstawowej harmonicznej zarejestrowanych prądów wirnika.

W celach kontrolnych obliczano wartość momentu elektromagnetycznego wytwarzanego przez pierwszą harmoniczną pola szczelinowego oraz podstawową harmoniczną prądu wirnika wg wzoru:

$$T_{e1} = \frac{3}{2} \frac{P_b}{2\pi f_s} I_w^2 \frac{R_w}{s} \quad (10)$$

Wyznaczone w ten sposób wartości różniły się od policzonych wg (1) – wartość momentu wg (10) była ok. 5% mniejsza.

## Wyniki pomiarów i obliczeń

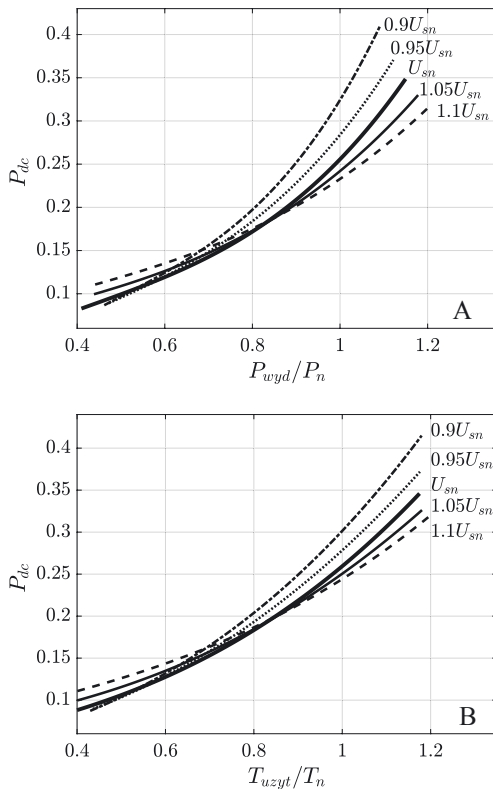
W trakcie opracowania zarejestrowanych przebiegów wykorzystywano parametry schematu zastępczego silnika oraz inne niezbędne do obliczeń wielkości wyznaczone w oparciu o klasyczne pomiary identyfikacyjne [2]:

$$R_s = 5,4\Omega, X_{os} = 7,1\Omega, X_\mu = 137,8\Omega, X'_{\sigma w} = 7,2\Omega,$$

$$R'_w = 0,089 n^2[\Omega], n = 10,58, P_{dFeso} = 0,036 P_n$$



Zachowanie warunku stałej mocy wydawanej i stałego momentu obciążenia przy zmianach napięcia zasilającego bywa w warunkach laboratoryjnych kłopotliwe, dlatego docelowe charakterystyki starano się uzyskać w dwóch etapach. Najpierw wyznaczono zależność strat podstawowych mocy wydawanej oraz momentu obciążenia, dla kilku wartości napięć zasilających. Ograniczono się do pięciu: 0,9, 0,95, 1, 1,05, 1,1 $U_n$ . Poszczególne charakterystyki przybliżano wielomianami trzeciego stopnia [4]. Na rysunku 1 przedstawiono wykresy strat całkowitych jako funkcji mocy wydawanej (Rys. 1A) oraz momentu (Rys. 1B).

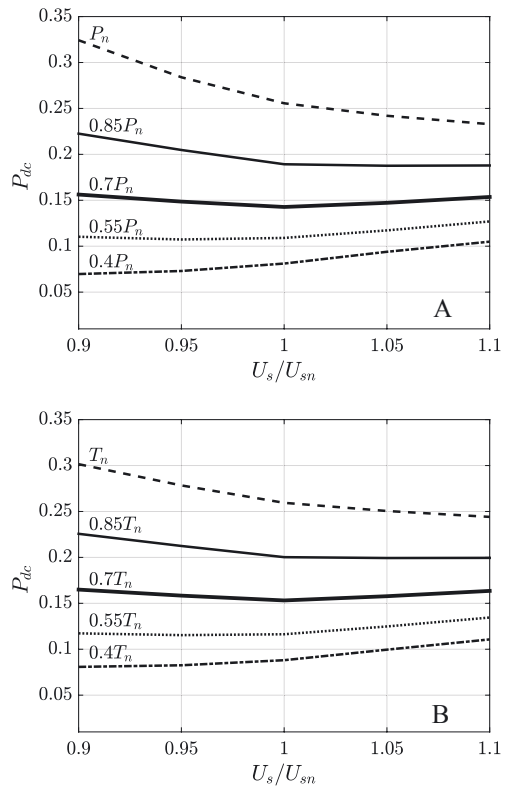


**Rysunek 1.** Zależność strat całkowitych od mocy wydawanej (A) i momentu użytecznego (B) przy stałym napięciu

Zgodnie z przewidywaniem, wraz ze zwiększaniem obciążenia straty monotonicznie rosną, przy czym dla mniejszych obciążeń udział strat

w rdzeniu relatywnie wzrasta, dlatego straty całkowite wzrastają ze wzrostem napięcia. Przy obciążeniach dużych sytuacja jest odwrotna, ponieważ dominują straty w uzwojeniach, które ze wzrostem napięcia zasilającego maleją.

Dysponując analityczną formą zależności  $P_{dc}$  ( $P_{wyd}$ ) oraz  $P_{dc}$  ( $T_{uzyt}$ ) dla  $U_s = const$ , można już było w prosty sposób uzyskać kilka punktów przebiegu  $P_{dc}(U_s)$  oraz  $\eta(U_s)$ . Na rysunku 2 przedstawiono wykresy strat całkowitych jako funkcji napięcia zasilającego dla stałej mocy wydawanej (Rys. 2A) oraz momentu obciążenia (Rys. 2B).

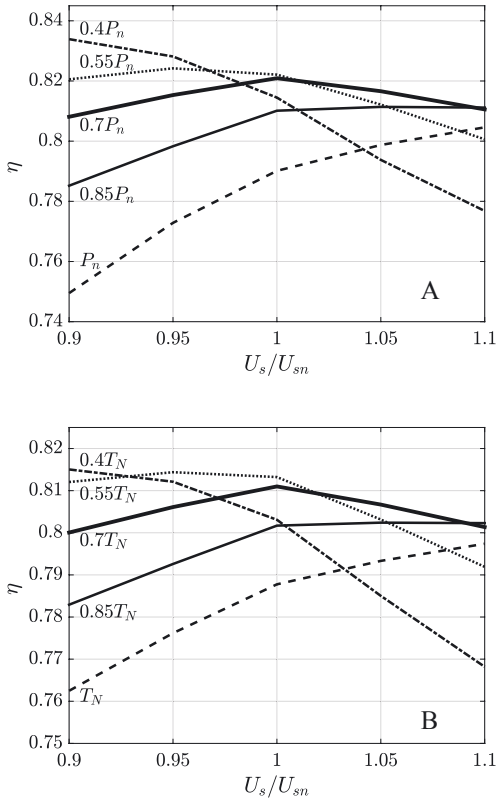


**Rysunek 2.** Zależność strat całkowitych od napięcia przy stałej mocy wydawanej (A) oraz przy stałym momencie obciążenia (B)

Na wykresach widać wyraźnie jak odmiennie wpływa poziom napięcia zasilającego na wartość strat całkowitych przy obciążeniach dużych i ma-

łych: przy dużych obciążeniach straty monotonicznie maleją ze wzrostem napięcia, przy małych – rosną. Minimum strat odpowiada napięciu znamionowemu dla 70% obciążenia znamionowego.

Na rysunku 3 przedstawiono wykresy sprawności jako funkcji napięcia zasilającego dla stałej mocy wydawanej (Rys.3A) oraz momentu obciążenia (Rys.3B).



**Rysunek 3.** Zależność sprawności od napięcia przy stałej mocy wydawanej (A) oraz przy stałym momencie obciążenia (B)

Na wykresach z rysunku 3 wpływ obciążenia silnika na zmiany sprawności uwidacznia się lepiej niż na wykresach wcześniejszych: sprawność silnika obciążonego znamionowo rośnie ze wzrostem napięcia, podczas gdy obciążonego w 40%

spada. Natomiast silnik obciążony w 70% zmienia swoją sprawność w granicach błędów pomiarowych, przy czym słabo wyekspozowane maksimum sprawności występuje tutaj przy napięciu znamionowym.

## Wnioski

Z wykonanych pomiarów laboratoryjnych oraz obliczeń wynika, że dla badanego silnika obciążonego, pozostającego w trybie pracy ciągłej (S1), nie można jednoznacznie przewidywać, że odchylenia wartości skutecznej napięcia od wartości znamionowej spowodują obniżenie sprawności i wzrost kosztów eksploatacji, ponieważ zmiany strat i sprawności zależą w sposób istotny od stopnia i rodzaju obciążenia, i to zarówno co do wielkości jak i znaku. W dopuszczonym przepisami [5] przedziale zmian wartości napięcia od  $-10\%$  do  $+10\%$  silnik obciążony znamionowo zwiększy swoją sprawność o ponad 5% przy pracy „na stałą moc” oraz o 3,5% przy pracy „na stały moment”. O badanym silniku obciążonym w 70% można powiedzieć, że w tym zakresie jest praktycznie „niewrażliwy” na zmiany napięcia. Natomiast w silniku obciążonym poniżej 50%, wzrost napięcia powoduje obniżenie sprawności: 5% przy pracy „na stałą moc” oraz o 4,5% przy pracy „na stały moment”.

Choć badaną maszynę można zaliczyć do typowych maszyn indukcyjnych pierścieniowych małej mocy, nie można przedstawionych wniosków uogólniać na większość silników indukcyjnych. Tym niemniej wykonane badania rzucają pewne światło na skalę i charakter zjawisk spowodowanych odchyleniami napięcia. Można jednak przewidywać, że w innych rodzajach pracy, np. przy pracy przerywanej z częstymi rozruchami, zmiany napięcia mogą zupełnie inaczej wpływać na koszty eksploatacji napędu.

## Literatura

1. Z. Hanzelka, Wahania napięcia, e-pismo Automatyka-Elektryka-Zakłócenia nr 5, <http://www.cire.pl/pliki/2/Hanzelka-nr5.pdf>
2. W. Latek, Badanie maszyn elektrycznych w przemyśle, WNT, Warszawa, 1989.
3. M. Dąbrowski, Projektowanie maszyn elektrycznych prądu przemiennego, WNT, Warszawa, 1994.
4. MATLAB R2013b, The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, United States.
5. Rozporządzenie Ministra Gospodarki z dnia 4 maja 2007r. w sprawie szczegółowych warunków funkcjonowania systemu elektroenergetycznego (Dz.U. 2007 nr 93 poz. 623 z późn. zmianami).
6. M. Piekieniak, Sprawność silnika indukcyjnego w warunkach wahań napięcia zasilania – pomiary laboratoryjne, Praca dyplomowa inżynierska, PWSZ w Tarnowie 2017.



# Zastosowanie algorytmów rojowych w zadaniu planowania sieci WLAN

## Application of rogue algorithms in the WLAN planning task

Adam Pieprzycki<sup>a,\*</sup>, Wiesław Ludwin<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Tarnowie, ul. Mickiewicza 8, 33-100 Tarnów, Polska*

<sup>b</sup>*Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie, Al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków, Polska*

\*Corresponding author: a\_pieprzycki@pwszta.edu.pl

---

### Streszczenie

Celem artykułu jest sprawdzenie i porównanie rojowych metod optymalizacji w zadaniu planowania wewnątrzbudynkowej sieci łączności bezprzewodowej (WLAN).

W tym celu, w procesie poszukiwania ekstremum funkcji kryterialnej, która jest wskaźnikiem optymalizacyjnych, zastosowano sześć algorytmów rojowych: sztucznej kolonii pszczół, nietoperza, pszczoły, kukułki, świetlika, optymalizacji rojem cząstek (ptasi).

**Słowa kluczowe:** optymalizacja, algorytmy optymalizacji, planowanie, WLAN, optymalizacja nieliniowa, algorytmy rojowe

### Abstract

The aim of this article is to examine and compare swarm optimization methods in the task of planning indoor wireless networks (WLAN).

For this purpose, in the process of searching for the extremum of the criterion function, which is an optimization indicator, six swarm algorithms were used: artificial bees colony, bat, bee, cuckoo, firefly, particle swarm (bird).

**Key words:** Artificial Bee Colony ABC, Bat Algorithm BA, Bee Algorithm BeA, Cuckoo Search CS, Firefly Algorithm FA, Particle Swarm Optimization PSO, WLAN planning, non-linear optimization

---

## Wstęp

Obecnie znanych jest ponad 100 algorytmów wykorzystujących zjawiska zachowań występujących w świecie roślin i zwierząt.

## Algorytmy rojowe

W systemach rojowych występuje kilka dynamicznych mechanizmów odpowiedzialnych za koordynację i wykorzystujących mechanizmy samoorganizacji oraz stygmergii.

Mechanizm samoorganizacji polega na tworzeniu wzorców globalnej struktury na podstawie interakcji niższego poziomu, takich jak [1]:

- sprzężenia zwrotne lokalnych interakcji, a wśród nich sprzężenia pozytywne – powodujące wzmocnienie aktywności i wynikające z realizacji prostych reguł behawioralnych oraz sprzężenia negatywne, prowadzące do stabilizacji zbiorowego wzorca;
- wzmocnienie losowych fluktuacji przez pozytywne informacje;
- wielokrotne interakcje prowadzące do podobnych reakcji deterministycznych i wykształcenia trwałej zbiorowości.

Stygmergia to druga z zasad zbiorowości stadnej dotycząca mechanizmu pośredniej koordynacji zachowania jednostek dzięki modyfikacji środowiska. Akcja wykonana przez osobnika zostawia ślad w środowisku, wpływający na sposób ponownego jej wykonania.

Mechanizm stygmergii można wyrazić w trzech zasadach, głoszących, że:

- praca stanowi behawioralną reakcję na stan otoczenia i nie zależy od specyfiki jednostki,
- modyfikacja środowiska wykorzystywana zostaje jako pamięć stanu pracy,
- identyczne zasady zachowania mogą w zależności od stanu środowiska tworzyć różne wzorce.

Na ogólny schemat algorytmu stadnego składają się trzy elementy:

- zainicjowanie początkowej populacji rozwią-

zań oraz ocenę jej jakości za pomocą funkcji kryterialnej ( $F_c$ ) lub funkcji dopasowania ( $F_{fit}$ ), którą można wyrazić jako:

$$F_{fit} = \begin{cases} 1, & \text{dla } F_c \geq 0 \\ \frac{1}{1 + |F_c|}, & \text{dla } F_c < 0 \end{cases} \quad (1)$$

– sprawdzenie czy spełnione jest kryterium stopu, a jeżeli nie jest to następuje:

- identyfikacja sąsiedztwa bieżących rozwiązań,
- wybór najlepszych rozwiązań z sąsiedztwa,
- akceptacja rozwiązań kandydujących lub ich odrzucenie,
- utworzenie nowej populacji rozwiązań;

– przedstawienie najlepszych rozwiązań.

## Charakterystyka wybranych algorytmów rojowych

Dla potrzeb niniejszej pracy, w procesie poszukiwania ekstremum funkcji kryterialnej za pomocą algorytmów rojowych, posłużono się algorytmem [2]:

- sztucznej kolonii pszczół ABC (*Artificial Bee Colony*),
- nietoperza BA (*Bat Algorithm*),
- pszczelim BeA (*Bee Algorithm*),
- kukułki CS (*Cuckoo Search*),
- świetlika FA (*Firefly Algorithm*),
- optymalizacji rojem cząstek PSO (*Particle Swarm Optimization*), nazywanym też ptasim.

Pierwszy z rozważanych algorytmów rojowych, **algorytm pszczeli BeA** umożliwia przeszukiwanie przestrzeni rozwiązań problemu wyrażonego funkcją kryterialną ( $F_c$ ) w sposób naśladujący zdobywanie nektaru przez rój pszczół.

Prace nad symulacją roju pszczół były prowadzone już na przełomie lat 70. i 80. XX wieku [3, 4]. Obecnie istnieje duża liczba modyfikacji i rozszerzeń podstawowej wersji tego algorytmu, w tym np., zaprezentowany w dalszej części rozdziału, algorytm sztucznej kolonii pszczół ABC.

W algorytmie BeA, początkowa grupa pszczół

zwiadowców ( $N_{sb}$ ) zostaje wysłana w celu przeszukania w sposób losowy obszaru i odnalezienia miejsc zasobnych w kwiaty. Po powrocie do ula pszczoły, podczas tańca pszczelego, przekazują informację innym pszczołom o swoim najlepszym odkryciu. Podczas wykonywania wywijanego tańca pszczelego (*waggle dance*) przekazana zostaje informacja o: lokalizacji znalezionej źródła pożywienia, czyli kierunku oraz odległości od ula oraz jakości źródła (nektaru). Do najlepszych miejsc (źródeł pożywienia) zostają wysłane pozostałe pszczoły i to one rozpoczynają zbiór nektaru. Im źródło nektaru jest zasobniejsze, tym więcej pszczoł o nim się dowiaduje.

Algorytm pszczeli BeA składa się z czterech etapów:

**Etap 1:** Losowej inicjalizacji rozwiązań początkowych – pszczoł zwiadowców ( $N_{sb}$ ).

**Etap 2:** Obliczeniu wartości funkcji kryterialnej ( $F_c$ ) – rozwiązań początkowych dla całej populacji.

**Etap 3:** Dopóki niespełnione jest kryterium stopu (zadana maksymalna liczba iteracji  $N_{iter}^{max}$ ) to należy:

- wybrać ( $N_{ss}$ ) spośród  $N_{sb}$  odwiedzonych miejsc,
- zrekrutować pszczoły ( $N_{esh}$ ) do najlepszych ( $N_{es}$ ) miejsc,
- wyznaczyć wartość funkcji celu ( $F_c$ ),
- wybrać najlepszą pszczołę w danym miejscu (najlepsze lokalne rozwiązanie),
- przypisać pozostałe pszczoły do losowych poszukiwań,
- obliczyć dla każdej z pszczoł wartość funkcji dopasowania (wz. 1).

**Etap 4:** Jeżeli kryterium stopu zostanie spełnione (liczba iteracji osiągnięta  $N_{iter}^{max}$ ), to wybierane jest najlepsze rozwiązanie.

Algorytm **sztucznej kolonii pszczoł ABC** po raz pierwszy został zaimplementowany przez D. Karaboga [6], a zainspirowany został inteligentnym zachowaniem pszczoł miodnych. W algorytmie tym, w populacji pszczoł możemy wyróżnić trzy typy pszczoł: zwiadowców, obserwatorów

oraz robotnice.

W algorytmie ABC „sztuczne pszczoły” poruszają się w trójwymiarowej przestrzeni poszukiwań, a pszczoły pracujące lub obserwujące wybierają źródło na podstawie własnych doświadczeń lub informacji pochodzących od innych pszczoł z roju. Z upływem czasu sztuczne pszczoły zaczynają odnajdywać źródła z różną ilością nektaru. Jeżeli odnalezione zostanie bardziej wydajne źródło nektaru, zostaje ono zapamiętane, a informacja o poprzednich (gorszych) źródłach zostaje usunięta.

Algorytm ABC łączy zarówno lokalne jak i globalne metody poszukiwania, balansując między procesem eksploracji i eksploatacji. Parametrami kontrolnymi w tym algorytmie są: rozmiar kolonii pszczoł ( $N_{pop}$ ) oraz maksymalna liczba iteracji ( $N_{iter}^{max}$ ) [7].

Pseudokod algorytmu ABC można opisać następującymi etapami:

**Etap 1:** Losowe wyznaczenie ( $N_s$ ) początkowych źródeł nektaru  $\vec{x}_i \in (1, \dots, N_s)$ , dla pszczoł zbierających (robotnic).

**Etap 2:** Wykonanie iteracji aż do spełnienia warunku stopu (osiągnięcia  $N_{iter}^{max}$ ):

- wysłanie pszczoł pracujących (zbierających nektar) do zapamiętanych miejsc pożywienia oraz wyznaczenie ilości nektaru,
- obliczenie wartości prawdopodobieństw dla „reklamowanych miejsc z pożywieniem”, na podstawie których będą uaktualnione pozycje preferowane przez pszczoły obserwarki:

$$p_i = \frac{Fit(\vec{x}_i)}{\sum_{j=1}^{N_s} Fit(\vec{x}_j)} \quad (2)$$

- wysłanie pszczoł obserwatorek do miejsc w pobliżu wybranych źródeł pożywienia i wyznaczenie ilości nektaru w tych miejscach:

$$v_{ij} = x_{ij} + (rand[1, -1]) \cdot (x_{ij} - x_{kj}), \quad (3)$$

$$k = [(rand[0,1] \cdot N_s) + 1, j \in [1, \dots, N_D],$$

Gdzie:  $N_D$  – wymiar problemu.

- zaprzestanie eksploatacji źródeł porzuconych,
- wysłanie pszczoł zwiadowców w celu odkrycia w sposób losowy nowych źródeł pożywienia (nektaru),

$$x_{ij} = x_j^{min} + (x_j^{min} - x_j^{min}) \cdot rand[0,1], \quad (4)$$

- zapamiętanie najlepszego znalezione do tej pory źródła pożywienia.

**Etap 3:** Przedstawienie otrzymanego rozwiązania zadania optymalizacji.

**Algorytm optymalizacji rojem cząstek PSO**, zwany też **algorytmem ptasim**, został zaproponowany w 1995 roku przez J. Kennedy'ego i R. Eberharta [8, 9]. Algorytm ten bazuje na zachowaniu całej populacji, w której istnieje możliwość komunikowania się między osobnikami (cząstkami) i dzielenia się informacjami. W algorytmie PSO każda cząstka ma określone położenie i prędkość. W przypadku odnalezienia lepszego rozwiązania, cząstki przemieszczają się do nowych miejsc-polożeń, poszukując optimum i zmieniają kierunek. Każda cząstka zna swoich sąsiadów, pamięta swoje najlepsze położenia oraz położenie swoich sąsiadów, a także wartości funkcji kryterialnej ( $F_c$ ) dla swojego położenia i położenia sąsiadów.

Algorytm PSO opiera swoje działanie na [10]:

**Etap 1:** Losowej inicjalizacji położenia i prędkości startowych cząstek.

**Etap 2:** Ocenie położenia cząstek za pomocą funkcji kryterialnej/dopasowania (wz. 1).

**Etap 3:** Porównaniu zachowania każdej cząstki z jej najlepszym dotychczasowym zachowaniem (aktualizacja informacji), wyłonienie lidera roju.

**Etap 4:** Uaktualnieniu prędkości każdej cząstki w każdym kroku, wyrażonej jako:

$$v_i^m = \omega v_i^{m-1} + c_1 r_1 (p_i^{m-1} - x_i^{m-1}) + c_2 r_2 (p_d^{m-1} - x_i^{m-1}), \quad (5)$$

gdzie:

- $v_i^m$  – prędkość cząstki ( $i$  w kroku ( $m$ ),
- $\omega$  – współczynnik bezwładności algorytmu,
- $c_1$  – waga określająca „świadomość roju”,
- $c_2$  – waga „myślenia społecznego”,
- $r_1$   $r_2$  – liczby losowe z przedziału [0, 1],

- $p_i^{m-1}$  – najlepsze, dotychczas znalezione przez danego osobnika, rozwiązanie,
- $p_d^{m-1}$  – najlepsze rozwiązanie znalezione przez cały-rój.

**Etap 5:** Uaktualnieniu położenia każdej cząstki w kroku ( $m$ ), zdefiniowanym jako:

$$x_i^m = x_i^{m-1} + v_i^m. \quad (6)$$

W pochodzącym z 2007 roku, **algorytmie świetlika FA** [10] opracowanym przez Xin-She Yanga z Uniwersytetu Cambridge, rozwiązanie zadania optymalizacji oparto na różnicy intensywności światła, która jest proporcjonalna do wartości funkcji kryterialnej ( $F_c$ ). Każdy jaśniejszy świetlik przyciąga do siebie pozostałe osobniki, co pozwala na skuteczne badanie przestrzeni przeszukiwań.

Algorytm świetlika FA opiera się na trzech założeniach:

- niezależności od płci osobnika – wszystkie świetliki mogą się wzajemnie przyciągać i są równie atrakcyjne,
- atrakcyjności proporcjonalnej do jasności świecenia, która maleje wraz z odległością między świetlikami – jeżeli wszystkie świetliki są tak samo atrakcyjne to poruszają się w sposób losowy,
- intensywności świecenia – określonej przez wartość funkcji kryterialnej  $F_c$ .

Ruch świetlika (położenie w kolejnym kroku –  $m$ ) można zdefiniować pojęciami: eksploatacji – podczas którego świetlik stara się zbliżyć do najjaśniejszego osobnika i eksploracji – czyli losowego błądzenia.

Ruch  $i$ -tego świetlika określa formuła:

$$x_i^m = x_i^{m-1} + \beta_0 e^{-\gamma d_{ij}^2} (x_j^{m-1} - x_i^{m-1}) + \alpha_{ra} \left( rand[0,1] - \frac{1}{2} \right), \quad (7)$$

gdzie:

- $x_i^{m-1}$  – bieżące położenie świetlika  $i$ ,
- $d_{ij}$  – odległość między świetlikami  $i$  oraz  $j$ ,
- $\beta_0$  – parametr określający atrakcyjność świetlika,
- $m$  – numer rozpatrywanego kroku,



$\alpha_{in}$  – parametr losowości przemieszczenia świelika z przedziału  $[0, 1]$ .

Jednym z najnowszych algorytmów optymalizacji, bo z 2009 roku, jest **algorytm kukulki CS**, który zaproponowany został przez Xin-She Yanga i Suash Deb. W algorytmie tym naśladowane są zachowania niektórych gatunków kukulki, które wykorzystują gniazda innych ptaków do wychowywania potomstwa.

Algorytm kukulki CS można opisać, tzw. pseudokodem [1, 10], uwzględniającym:

**Etap 1:** Losowe wygenerowanie początkowej populacji gniazd  $N_{nest}$ .

**Etap 2:** Wykonanie iteracji dopóki nie jest spełniony warunek stopu (osiągnięcia  $N_{iter}^{max}$ ):

wybrać losowo  $i$ -tę kukulkę, wygenerować rozwiązanie, np. przez lot Lévy'ego:

$$x_i^m = x_i^{m-1} + \alpha_{CS} Levy, \quad (8)$$

gdzie:

$m$  – numer kroku (iteracji),

$x_i$  – rozwiązanie dla kukulki  $i$ ,

$\alpha_{CS}$  – współczynnik skalujący powiązany z rozmiarem problemu,

$Levy$  – losowy krok o długości wyznaczonej na podstawie rozkładu Lévy'ego,

oraz obliczyć dla niej funkcję kryterialną  $F_c^i$ ,

- gdy spełniona jest nierówność:  $F_c^i > F_c^j$ , należy zastąpić zawartość gniazda  $j$  nowym rozwiązaniem,
- porzucić część gorszych gniazd (z prawdopodobieństwem  $p_a$ ) i zastąpić je nowymi gniazdami,
- posortować osobniki i zapamiętać i przekazać najlepsze rozwiązania do kolejnych iteracji.

**Etap 3:** Jeśli spełnione zostało kryterium stopu, to wskazać najlepsze rozwiązanie.

**Algorytm nietoperza BA**, zaproponowany w 2010 przez Xin-She Yanga, zainspirowany został echolokacją nietoperzy z podrzędu *Microchiroptera*.

Parametrami sterującymi dla tego algorytmu są: szybkość emisji impulsów  $r_i$  oraz głośność  $A_i$ .

Na kolejne etapy algorytmu nietoperza BA [11] składają się:

**Etap 1:** Losowe wygenerowanie początkowej populacji nietoperzy  $N_{bat}$  i ich prędkości poruszania się. Zainicjowanie: częstotliwości,  $r_i$ ,  $A_i$ .

Etap 2: Dopóki nie jest spełniony warunek stopu (osiągnięcie  $N_{iter}^{max}$ ), generowane są, przez dostosowanie częstotliwości, uaktualnienie prędkości i lokalizacji/rozwiązania, nowe rozwiązania. Położenie  $i$ -tego nietoperza określa formuła:

gdzie:

$$x_i^{m+1} = x_i^m + v_i^m + (x_i^m - x_*)[f_{min} + (f_{max} - f_{min})\beta_{BA}], \quad (9)$$

$x_i^m$  – bieżące położenie nietoperza  $i$ ,

$v_i^m$  – prędkość nietoperza  $i$ ,

$\beta_{BA}$  – losowa wartość z przedziału  $[0, 1]$ ,

$f_{min}, f_{max}$  – minimalna i maksymalna częstotliwość,

$x_*$  – bieżące najlepsze rozwiązanie.

Jeżeli losowa wartość jest większa od  $r_i$ , to należy:

- wybrać rozwiązanie spośród najlepszych rozwiązań,
- wygenerować lokalne rozwiązanie naokoło wybranego najlepszego rozwiązania.

Wygenerować nowe rozwiązania przez losowy lot.

Jeżeli losowa wartość jest mniejsza od  $A_i$  i spełniona jest nierówność:  $F_c(x) < F_c(x_*)$  należy:

- zaakceptować nowe rozwiązanie,
- zwiększyć  $r_i$  oraz zmniejszyć  $A_i$ .

**Etap 3:** Przeglądnięcie, ocenienie nietoperzy oraz odszukanie bieżącego najlepszego rozwiązania  $x_*$ .

## Materiały i Metody

Znanym sposobem analizy algorytmów jest użycie różnych funkcji testujących, np.: de Jong, Rosenbrock, Rastrigin, Easom, Salomon czy różnych instancji Taillarda [11].

W artykule, zaprezentowane algorytmy rojowe zastosowaniu w rozwiązaniu zadania optymalizacji sieci WLAN.

W zadaniu planowania liczby punktów dostępu AP (*Access Point*) do sieci WLAN (*Wireless Local Area Network*), ich wzajemnego położenia zarówno względem siebie, jak i stacji ST (*station*), którymi posługują się użytkownicy oraz dobór parametrów pracy tych punktów (np.: mocy wyjściowej nadajnika, numeru kanału radiowego,

parametrów techniki dostępu do łącza radiowego, rozmiaru pakietu) są wynikiem wyznaczenia optimum przyjętej funkcji kryterialnej.

Zastosowana funkcja kryterialna realizuje koncepcję podziału zasięgu radiowego punktu dostępu AP na obszary, w których transmisja odbywa się z szybkościami zależnymi od SINR (*Signal to Interference plus Noise Ratio*) i uwzględnia przepustowości osiągnięte przez poszczególne stacje ST wymieniające dane z punktami AP sieci WLAN.

**Tabela 1.** Dane opisujące sieć WLAN oraz zadanie optymalizacji

Sieć WLAN	
Liczba stacji $ST N_{ST}$	20
Liczba punktów $AP N_{AP}$	3
Poziom czułości odbiornika $S_{thr}$ /szybkość transmisji $M_{TR}$	-75 dBm / 54 Mbit/s
Sprzęt komputerowy	
Komputer PC	CPU Intel Core i5-3450 3,1 [GHz] / Win 7 64b
Metody i algorytmy optymalizacji	
Kryterium stopu – liczba iteracji	$N_{iter}^{max}=300$ dla BeA oraz 1000
Wymiar problemu	$N_D=N_{AP} \cdot 2$
ABC	
Liczba pszczół,	$N_{pop}=N_s \cdot 50$
Górna granica współczynnika przyspieszenia	$a_{ABC}=\{0,1 \ 0,5 \ 0,9 \ 1,0\}$
BA	
Liczba nietoperzy	$N_{bat} = 50$
Szybkość emisji impulsów <i>Pulse rate</i>	$r_i=\{0,5 \ 0,7 \ 1\}$
Głośność	$A_i=\{0 \ 0,5 \ 0,7\}$
BeA	
Liczbę pszczół skautów	$N_{sb}=30, 50$
Liczbę: wybranych miejsc i pszczół do wybranych miejsc	$N_{ss} = [0,5N_{sb}], N_{ssb}=[0,5N_{sb}]$
Liczbę elitarnych miejsc i pszczół do elitarnych miejsc	$N_{es} = [0,4N_{ss}], N_{esb} = 2N_{ssb}$
Promień sąsiedztwa	$0,1(X_{max} - X_{min})$
CS	
Liczba gniazd	$N_{nest} = 50$
Prawdopodobieństwo wykrycia jaja podrzuczonego przez kukułkę	$p_a = \{0,25, 0,30, 0,35, 0,40, 0,45, 0,46, 0,47, 0,48, 0,49, 0,50, 0,55\}$

## FA

Liczba świetlików	$N_{ff}=50$
Parametr losowości	$\alpha_{ff} = \{0,2, 0,5, 1\}$
Współczynnik „atrakcyjności” odniesienia	$\beta_o = \{0,1, 0,2, 1\}$
Współczynnik absorpcji	$\gamma = \{0,01, 0,1, 1, 10\}$

## PSO

Liczebność „roju”	$N_{ps0}=50$
Współczynnik inercji	$\omega = 1$
Współczynnik poznawczy <i>Cognition Coefficient</i>	$c_1 = \{1,0, 1,5, 1,6, 1,7, 1,8, 1,9, 2,0\}$
Współczynnik społeczny <i>Social Coefficient</i>	$c_2 = \{1,0, 1,5, 2,0, 2,1, 2,2, 2,3, 2,5, 3,0\}$

Analogicznie do wskaźnika wydajności sieci zdefiniowanego w pracy [12], w procesie planowania sieci WLAN przyjęto funkcje kryterialną:

$$F_c = \sum_{j=1}^{N_{AP}} \sum_{k=1}^{L_{TRj}} S_k \cdot (d_{jk}^2 - d_{j(k-1)}^2), \quad (6)$$

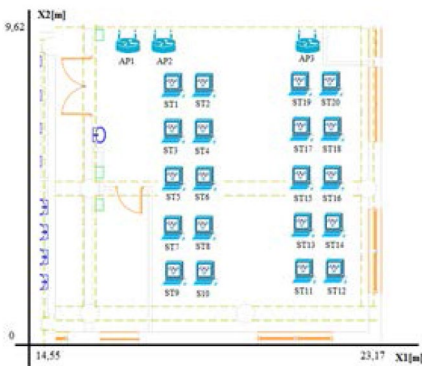
gdzie:  $L_{TRj}$  – liczba klas ruchu dla  $j$ -tego punktu AP,  $S_k$  – przepustowość dla  $k$ -tej klasy (szybkości transmisji) – odległość między najdalszą stacją należącą do  $k$ -tej klasy ruchu a  $j$ -tym punktem AP.

Rozwiązanie zadania optymalizacji polegało na określeniu maksymalnej wartości funkcji kryterialnej wyrażonej wzorem (10).

W poszukiwaniu ekstremum funkcji kryterialnej wykorzystano sześć algorytmów stadnych. Rozważono różne znane z literatury wartości parametrów sterujących dla zastosowanych algorytmów, które opracowano i zaadaptowano na potrzeby programu obliczeniowego opierając się na pracach dla: ABC [13], BA [10, 14], BeA [13], CS [15], FA [16], PSO [17].

## Wyniki i Dyskusja

Dla analizowanej funkcji kryterialnej  $F_c$ , zapisanej wzorem (10), poszukiwano rozwiązania o największej wartości. Wartość średnią wyznaczono na podstawie 10 powtórzeń dla każdego parametru analizowanego algorytmu.



**Rysunek 1.** Analizowany obszar działania sieci WLAN o 20 stacjach ST i trzech punktach AP

**Tabela 2.** Wyniki uzyskane za pomocą algorytmu sztucznej kolonii pszczół ABC

Parametr ( $a_{ABC}$ )	$\bar{F}_c \pm \sigma$	$F_c^{max}$	Nr iteracji $N_{iter}$ ostatniej zmiany $F_c$	$T_{opt}$ [s]
0,1	$2198 \pm 108$	2400	702	85385
0,5	$2046 \pm 108$	2191	455	78297
0,9	$1996 \pm 111$	2166	333	83115
1,0	$2160 \pm 182$	<b>2599</b>	338	75517

**Tabela 3.** Wyniki uzyskane za pomocą algorytmu nietoperza BA

Parametry ( $r_i A_i$ )	$\bar{F}_c \pm \sigma$	$F_c^{max}$	Nr iteracji $N_{iter}$ ostatniej zmiany $F_c$	$T_{opt}$ [s]
(0,5 0,5)	$1566 \pm 559$	2346	999	42078
(0,7 0,7)	$1285 \pm 598$	2188	999	43677
(1,0 0,0)	$1537 \pm 653$	<b>2438</b>	999	43452

**Tabela 4.** Wyniki uzyskane za pomocą algorytmu pszczelego BeA

Parametry ( $N_{sb} N_{iter}^{max}$ )	$\bar{F}_c \pm \sigma$	$F_c^{max}$	Nr iteracji $N_{iter}$ ostatniej zmiany $F_c$	$T_{opt}$ [s]
(30 300)	$2417 \pm 563$	<b>3699</b>	286	78806
(50 1000)	$2643 \pm 421$	3495	330	808930

**Tabela 5.** Wyniki uzyskane za pomocą algorytmu kukułki CS

Parametr ( $p_a$ )	$\bar{F}_c \pm \sigma$	$F_c^{max}$	Nr iteracji $N_{iter}$ ostatniej zmiany $F_c$	$T_{opt}$ [s]
(0,25)	$3826 \pm 191$	4201	916	84275
(0,3)	$3319 \pm 433$	3787	920	77123
(0,35)	$3488 \pm 492$	4237	962	78008
(0,4)	$3613 \pm 328$	3787	486	76331
(0,45)	$3825 \pm 142$	4230	868	78574
(0,46)	$3477 \pm 412$	3786	996	77585
(0,47)	$3779 \pm 386$	4295	683	83242
(0,48)	$3579 \pm 342$	3786	671	90479
(0,49)	$3352 \pm 443$	3786	920	88594
(0,50)	$3770 \pm 558$	<b>4391</b>	855	67933
(0,55)	$3587 \pm 326$	4137	664	78386

**Tabela 6.** Wyniki uzyskane za pomocą algorytmu świetlika FA

Parametry ( $\alpha_{ff}$ $\beta_0$ $\gamma$ )	$\bar{F}_c \pm \sigma$	$F_c^{max}$	Nr iteracji $N_{iter}$ ostatniej zmiany $F_c$	$T_{opt}$ [s]
(0,2 1,0 1,0)	2523 $\pm$ 246	2900	990	39134
(0,5 1,0 0,01)	2603 $\pm$ 184	2929	994	38462
(0,5 1,0 0,1)	2672 $\pm$ 96	2913	996	41369
(0,5 1,0 1,0)	2556 $\pm$ 271	2896	997	38390
(0,5 1,0 10)	2517 $\pm$ 167	2636	998	40175
(0,8 1,0 1,0)	2477 $\pm$ 213	3013	997	42252
(1,0 1,0 0,01)	2703 $\pm$ 351	3741	998	39893
(1,0 1,0 0,1)	2617 $\pm$ 272	3201	995	39857
1,0 1,0 1,0)	2627 $\pm$ 529	<b>3783</b>	997	48951

**Tabela 7.** Wyniki uzyskane za pomocą algorytmu optymalizacji rojem cząstek PSO

Parametry ( $c_1$ $c_2$ )	$\bar{F}_c \pm \sigma$	$F_c^{max}$	Nr iteracji $N_{iter}$ ostatniej zmiany $F_c$	$T_{opt}$ [s]
(1,0 1,0)	977 $\pm$ 350	1554	5	38740
(1,0 3,0)	2009 $\pm$ 444	2569	300	45177
(1,5 1,5)	1744 $\pm$ 461	2286	16	39949
(1,5 2,5)	2221 $\pm$ 421	3324	935	39144
(1,6 2,4)	2234 $\pm$ 216	2592	991	43982
(1,7 2,3)	2036 $\pm$ 505	3020	768	43591
(1,8 2,2)	2616 $\pm$ 526	<b>3783</b>	956	43376
(1,9 2,1)	2298 $\pm$ 74	2415	819	42708
(2,0 2,0)	2186 $\pm$ 639	2911	273	31236

**Tabela 8.** Test kolejności par Wilcozona dla najlepszych rozwiązań algorytmów i 10 ważnych prób

Algorytm 1 i 2	Wartość testu	Poziom p
	T	(prawdopodobieństwa testowego)
CS i FA	3,00000	0,012516
CS i PSO	1,00000	0,006911
CS i BeA	0,00000	0,005062
CS i ABC	0,00000	0,005062
CS i BA	0,00000	0,005062

**Tabela 9.** Zestawienie wyników obliczeń numerycznych dla najlepszych rozwiązań

Algorytm	Współrzędne trzech AP [m]		$N_{ST}$	$F_c^{max}$ [(Mbit/s) m <sup>2</sup> ]
	$X_{AP}$	$Y_{AP}$		
BA	21,11	0,01	9	2438
	22,44	0,92	10	
	21,63	0,44	1	
ABC	16,45	9,60	14	2599
	14,96	8,24	1	
	14,87	8,08	5	
BeA	14,55	9,52	1	3699
	14,60	9,46	11	
	21,83	9,52	8	
PSO	14,55	9,62	1	3783
	21,83	9,62	8	
	14,70	9,57	11	
FA	21,83	9,56	8	3783
	14,55	9,62	1	
	14,61	9,58	11	
CS	15,71	9,62	<b>1</b>	4391
	16,28	9,62	<b>1</b>	
	16,33	9,57	<b>18</b>	

## Podsumowanie

Spośród sześciu zastosowanych algorytmów, największą wartość funkcji kryterialnej (10) uzyskano dla algorytmu CS i prawdopodobieństwa na poziomie 0,5, natomiast największą wartość średnią uzyskano dla na poziomie 0,25 (Tab. 5).

Dla każdego rozważonego przypadku z różną wartością algorytmu CS maksymalna wartość funkcji kryterialnej była co najmniej równa największym wartościom funkcji kryterialnej pozostałych algorytmów.

Z zestawienia wartości funkcji kryterialnych zaprezentowanych w tabelach 2-7 wynika, że w wielu przypadkach ostatnie zmiany funkcji kryterialnych były bliskie przyjętej wartości maksymalnej. Mimo dużej liczby iteracji dla każdego

analizowanego przypadku, można przypuszczać, że zwiększenie mogło by prowadzić do uzyskania większych wartości np. dla algorytmu BA czy FA (Tab. 3 i 6).

Z przedstawionych w tabelach 2-7 wyników obliczeń  $F_c$  można zauważyć wpływ parametrów sterujących na osiągnane wyniki. Dla algorytmu pszczelego BeA (Tab. 4) czas obliczeń  $T_{opt}$  był o rząd wielkości większy niż dla ABC i CS, a prawie 20 krotnie większy niż dla pozostałych algorytmów.

Zastosowanie algorytmu świetlika FA, optymalizacji rojem cząstek PSO czy algorytmem pszczelim BeA w przedstawionym zadaniu optymalizacji dało wynik gorszy (Tab. 9), z innym niż dla CS, ale analogicznym sposobem przydzielenia stacji ST do trzech punktów AP. Całkowicie inne

rozwiązania z inną liczbę stacji ST przyporządkowanych do punktów AP uzyskano przy zastosowaniu algorytmów ABC oraz BA (Tab. 9).

Zbadano pary wyników obliczeń najlepszych rozwiązań z CS oraz pozostałych pięciu zastosowanych algorytmów testem Wilcoxon. Postawiono hipotezę zerową o braku istotnych różnic między wynikami uzyskanymi za pomocą zastosowanych algorytmów, dla najlepszych przypadków, w których uzyskano największą wartość funkcji kryterialnej. Z otrzymanych wyników (Tab. 8) należy wnioskować, że hipoteza ta powinna zostać odrzucona dla wszystkich przedstawionych par algorytmów przy poziomie istotności  $p < 0,05$ .

Dla zaprezentowanego zadania optymalizacji, przy zastosowaniu algorytmu CS uzyskano wartości funkcji kryterialnej, które były większe niż te uzyskane z zastosowaniem pozostałych analizowanych rojowych algorytmów optymalizacji. Dla rozwiązania zadania optymalizacji z użyciem CS uzyskano także całkowicie inny przydział stacji ST do trzech punktów AP.

## Podziękowania

Przedstawione badania powstały przy użyciu zasobów obliczeniowych PLGrid.

## Literatura

1. J. Kwiecień, Algorytmy stadne w rozwiązaniu wybranych zagadnień optymalizacji dyskretnej i kombinatorycznej, AGH, Kraków, 2015.
2. B. Filipowicz i J. Kwiecień, *Pomiary Automatyka, Robotyka*, 2011, **12**, 152-157.
3. A. Migacz i R. Tadeusiewicz, Model rodziny pszczołej, Akademia Medyczna, Kraków, 1979.
4. A. Migacz i R. Tadeusiewicz, *System Science*, 1983, **3**, 83-95.
5. D. Karaboga, An idea based on honey bee swarm for numerical optimization, Erciyes University, Engineering Faculty, Computer Engineering Department, 2005.
6. D. Karaboga i B. Akay, Artificial Bee Colony (ABC), Harmony Search and Bees Algorithms on Numerical Optimization, W: IPROMS 2009 Innovative Production Machines and Systems Virtual Conference, Cardiff, UK, 2009.
7. J. Kennedy i R. Eberhart, Particle Swarm Optimization, IEEE International Conference on Neural Networks, 1995.
8. R. Eberhart, Y. Shi i J. Kennedy, *Swarm Intelligence*, Morgan Kaufman, San Francisco, 2001.
9. K. Trojanowski, *Metaheurystyki praktycznie*, wyd. 2, WIT, Warszawa, 2008.
10. X.-S. Yang, *Nature-inspired optimisation algorithms*, Elsevier, 2014.
11. E. D. Taillard, *European Journal of Operational Research*, 1993, **64**, 278-285.
12. Methodology for Testing Wireless LAN Performance, [http://www.super-g.com/collateral/atheros\\_benchmark\\_whitepaper.pdf](http://www.super-g.com/collateral/atheros_benchmark_whitepaper.pdf) [02.02.2017].
13. S. Mostapha Kalami Heris, Implementation of Standard Bees Algorithm in MATLAB, Yarpiz, <http://yarpiz.com/315/yypeal15-bees-algorithm> [02.02.2017].
14. X.-S. Yang, Bat algorithm, <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/37582-bat-algorithm--demo-> [02.02.2017].
15. X. S. Yang, Cuckoo Search (CS) Algorithm, <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/29809-cuckoo-search--cs--algorithm> [02.02.2017].
16. X. S. Yang, Firefly Algorithm for Constrained Optimization, [www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/29693-firefly-algorithm](http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/29693-firefly-algorithm) [02.02.2017].
17. Particle swarm analysis, <http://www.codeforge.com/article/259219> [02.02.2017].





# Analiza fizykochemiczna kwiatów i owoców tarniny – krzewu, od którego pochodzi nazwa miasta Tarnowa

## Physico-chemical analysis of flowers and sloes of blackthorn – the shrub from which the name of the town of Tarnow originates

Małgorzata Martowicz<sup>a,\*</sup>, Magdalena Kosiba<sup>a</sup>

*<sup>a</sup>Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Tarnowie, ul. Mickiewicza 8, 33-100 Tarnów, Polska*

*\*Corresponding author: m\_martowicz@pwszstar.edu.pl*

---

### Streszczenie

W opracowaniu poddano analizie krzew, od którego prawdopodobnie pochodzi nazwa miasta Tarnowa. Kwiaty i owoce tarniny znane są od lat z właściwości leczniczych. Charakteryzują się wysoką aktywnością farmakologiczną, ze względu na bogactwo związków biologicznie czynnych. Napary, wywary i herbatki stosowane były od dawna w celu złagodzenia wielu dolegliwości. Zatem jako główny cel pracy przyjęto analizę fizykochemiczną tarniny, zarówno kwiatów (suszy) jak i owoców (świeże i suszy), pod kątem zawartości składników istotnych dla zdrowia człowieka. Analizie poddano również herbatę „Tarninówkę”, złożoną głównie z owoców tarniny.

Celem szczegółowym było zbadanie zawartości witaminy C i porównanie jej ilości w naparze z suszonych kwiatów tarniny, „kompocie” z suszonych terek, w mrożonych owocach oraz herbatce „Tarninówka”. W kolejnym etapie oznaczono w kwiatach, owocach i herbatce „Tarninówka” także antocyjany, garbniki i szczawiany. Zawartość wszystkich analizowanych czynników jest niezwykle istotna dla zdrowia konsumenta. Jednak antocyjany oraz garbniki mają właściwości prozdrowotne, natomiast szczawiany tzw. antyodżywcze, czyli mają negatywny wpływ na zdrowie człowieka. Te ostatnie oznaczono w herbatce „Tarninówka”, sprawdzając jednocześnie czy czas i sposób parzenia herbaty może mieć wpływ na ostateczną zawartość szczawianów w spożywanym napoju. Do analiz wykorzystano metody miareczkowe (jodometrię i metodę Tillmansa), a także metody spektroskopowe (spektroskopię UV VIS i FTIR-ATR).

**Słowa kluczowe:** Tarnów, tarnina, witamina C, antocyjany, garbniki, szczawiany

### Abstract

The study analyzed the shrub, from which the city of Tarnow probably derives its name. Flowers and fruits of sloes have been known for years for their medicinal properties. They are characterized by high pharmacological activity, due to the richness of biologically active compounds. Drinks, solution, and teas have long been used to alleviate many ailments. Thus, the physico-chemical analysis of blackthorn, both

flowers (dried) and fruit (fresh and dried), was based on the content of components relevant to human health. “Tarninówka” tea, composed mainly of sloes, was also analyzed.

The detailed objective was to examine the content of vitamin C and compare its amount in the infusion of dried sloe blossom, “compote”, in frozen fruit and “Tarninówka” tea. Additionally, in the flowers, fruits and “Tarninówka” tea also included anthocyanins, tannins and oxalates. The content of all analyzed factors is extremely important for the health of the consumer. However, anthocyanins and tannins have pro-health properties. Oxalates, however, are anti-nutrition, that is, they have a negative impact on human health. The latter was indicated in “Tarninówka” tea while checking whether the time and method of brewing tea can affect the final content of oxalate in the consumed beverage. The analyses used titrimetric methods (iodometry and Tillman’s method) as well as spectroscopic methods (UV VIS and FTIR-ATR spectroscopy).

**Key words:** Tarnów, blackthorn, vitamin C, anthocyanins, tannins, oxalates

## Wstęp

Tarnina jest ciernistym krzewem o wysokości 1-3 m wywodzącym się z rodziny różowatych. Pierwsze wzmianki o *Prunus spinosa* L. pojawiły się w XVIII wieku w pracach Linneusza, jednego z najwybitniejszych przyrodników. *Prunus spinosa* L. rośnie bardzo powszechnie w całej Europie, północnej Afryce oraz Azji mniejszej. W Polsce tarnina występuje pospolicie. Rośnie głównie na nizinach i w obszarach górskich do wysokości ok. 900 m.n.p.m. Tworzy gęste zarośla, często trudne do przebycia [1]. W Tarnowie krzewy tarniny można spotkać głównie w okolicach góry św. Marcina oraz na obrzeżach miasta.

Kwiaty tarniny wyrastają pojedynczo, ale bardzo gęsto, są drobne (średnica do 1,5 cm) i śnieżnobiałe, co jest spowodowane brakiem jakiegokolwiek barwnika w komórkach płatków. Pięknie pachną, są owadopylne i miododajne. Tarnina jest rośliną, która bardzo obficie kwitnie, zanim na pędach pojawią się liście. Okres kwitnienia przypada na miesiące marzec-maj [2-4].

Owoce tarniny – tarki należą to pestkowców. Charakteryzują się kulistym lub jajowatym kształtem. Duża zawartość flawonoidów – przeciwutleniaczy nadaje im barwę od niebieskawoczarnej do ciemnofioletowej. Owoce *prunus spinosa* L. są

niewielkie, ich wymiary to 1-1,5 cm długości i 0,8-1,2 cm szerokości. Rosną na krótkich ogonach i są ustawione sztywno ku górze. W ich wnętrzu znajduje się jedna kulista pestka. Miąższ nie odchodzi od pestki, jest cierpki i kwaśny z powodu dużej zawartości garbników. Dlatego owoce tarniny są jadalne dopiero po pierwszych przymrozkach. Okres ich dojrzenia przypada na sierpień, ale wiszą one bardzo długo na krzewie, aż do zimy [3-5]. Owoce tarniny charakteryzują się dużą zawartością wody (ok. 61%), są bogate w węglowodany, głównie monosacharydy, w szczególności glukozę, a także pektyny [6]. Z tego względu ich wartość energetyczna jest duża (dla 100 g suszonych tarków wynosi ok. 380 kcal). Spośród tłuszczu w tarkach przeważa kwas oleinowy, występuje także mniejsza ilość wielonienasyconych kwasów tłuszczowych, głównie kwas linolowy [7]. Tarki zawierają również dość dużo soli mineralnych (najwięcej wapnia, potasu, fosforu, siarki i manganu). Mimo tego, że charakteryzują się cierpkim i kwaśnym posmakiem, zawierają najwięcej cukrów spośród owoców leśnych. Powodem gorzkiego smaku są duże ilości garbników (1,7%) oraz kwasów organicznych (2,5-2,6%). W ich składzie znajdziemy również błonnik (2,4%), sterole oraz flawonoidy, głównie antocyjany i kamferol [8, 9]. Duże ilości antocyjanów odzwierciedla inten-

sywna fioletowo-granatowa barwa, gdyż związki te są najpopularniejszymi barwnikami polifenolowymi. Ich obecność jest bardzo korzystna ze względu na ich silne właściwości przeciwutleniające. Tarki są ponadto bogate w witaminę C oraz E (tokoferole), posiadają również w niewielkich ilościach  $\beta$ -karoten [10-12].

Pestki owoców tarniny posiadają właściwości trujące. Powodem jest duża zawartość glikozydów cyjanogennych, głównie amygdaliny i prunazyny oraz występującej w znacznie mniejszej dawce sambunigriny. Związki te są prekursorem cyjanowodoru (kwasu pruskiego) oraz aldehydu benzoesowego. Cyjanoglikozydy ulegają hydrolizie pod wpływem enzymu  $\beta$ -glukozydazy do cukru i cyjanohydrynu, a te następnie rozkładają się do toksycznego cyjanowodoru i związków karbonylowych. Kwas pruski jest silną trucizną, ponieważ zakłóca proces oddychania poprzez blokowanie oksydazy cytochromowej [13]. Cyjanowódór blokuje enzym odwracalnie, dzięki czemu można uratować zatrutych tym związkiem. Dawka śmiertelna kwasu pruskiego dla człowieka wynosi 50-60 mg. W Polsce zawartość kwasu pruskiego w produktach konsumpcyjnych jest ściśle normowana, dopuszczalne jest maksymalnie 3 mg HCN w 1 dm<sup>3</sup> wyrobów alkoholowych, a takie wykonuje się też na bazie owoców tarniny, której pestki mają największy wpływ na powstawanie cyjanowodoru. Należy wspomnieć również, że glikozydy cyjanogenne mogą być uznawane jako pozytywny składnik tarek, ale tylko i wyłącznie w ściśle sprecyzowanych ilościach. Rozkład amygdaliny wywołuje bowiem przyjemny zapach migdałów, który pochodzi od powstającego aldehydu benzoesowego, co korzystnie wpływa na cechy sensoryczne napojów alkoholowych i innych wyrobów [14, 15].

Tarnina jest aktualnie szeroko wykorzystywana w różnorodnych gałęziach gospodarki. Stanowi cenny surowiec zielarski i należy do roślin leczniczych. Pierwsze wzmianki o niej pojawiły się już w pracach ucznia i przyjaciela Arystotelesa,

Teotrasta z Eresos pod tytułem „O badaniu roślin”. Najcenniejsze i najczęściej stosowane są jej owoce, ale zastosowanie w fitoterapii znalazły także kwiaty, kora i liście [16, 17].

Pierwsza wzmianka o Tarnowie pojawia się w spisie dóbr Benedyktów Tynieckich z 1124 roku, sporządzonym przez Idziego, papieskiego legata [18]. Te zapiski mówią, że pod koniec XI wieku w okolicach góry św. Marcina powstała wieś zwana Tarnowem. Założycielem miasta był prawdopodobnie Spycimir Leliwita, oddany rycerz króla Władysława Łokietka, wojewoda krakowski, protoplasta rodu Tarnowskich, pierwszy świecki dostojnik w Królestwie Polskim [19-21]. Spycimir w latach 1329-1331 wybudował na górze św. Marcina duży zamek w celach obronnych, a 7 marca 1330 roku otrzymał od króla „Akt lokacyjny dla miasta Tarnów”. Jego kluczowy fragment brzmi: „na założenie i fundowanie miasta Tarnów od Władysława Łokietka króla polskiego Spycimirowi w roku Pańskim 1330 przywołony i dany” [22, 23]. Jan Curyło pisał o tym wydarzeniu w swoim dziele „Ballada herbowa”:

*Spycimir w ogrodzie zasłynął  
gdzie tarnina rosła  
Cierpki owoc jej granatowy  
zamieniony w „przednią piwnicę”  
zauroczył stół Łokietkowy  
i gród miastem wpisał w Metrycę [24]*

Skąd wzięła się zatem nazwa miasta? Odpowiedź na to pytanie znajduje się w pracy pt. „Liber beneficiorum dioecesis cracoviensis” autorstwa Jana Długosza, który twierdzi, że nazwa Tarnowa ma związek z krzewami tarniny gęsto porastającymi znajdujące się w okolicy wzgórza [25]. Znana jest też inna wersja, która mówi, że nazwa miasta łączy się rycerzem Tarnem, pierwszym właścicielem osady na terenie miasta. Jednakże pierwsza wersja znajduje więcej zwolenników. Potwierdza ją Stanisław Rospond, profesor Uniwersytetu Warszawskiego, a także Aleksander Brücker i Stanisław Szober, autorzy słowników

etymologicznych. O pochodzeniu nazwy Tarnowa od krzewów tarniny wspomina również Stanisław Orzechowski w dziele „Żywot i śmierć Jana Tarnowskiego kasztelana krakowskiego, hetmana wielkiego koronnego” oraz Bartosz Paprocki w utworze „Gniazdo cnoty”. Dodatkowo o początkach Tarnowa, jego powstaniu i nazwie znanych jest wiele legend i podań ludowych, przekazywanych ustnie, z pokolenia na pokolenie [26]. Wiele z nich spisano, a część wciąż żyje w pamięci starszych mieszkańców Tarnowa [24, 27].

Nazwa miasta Tarnów utożsamiana jest z krzewami tarniny obrastającymi Górę św. Marcina. Owoce tarniny cenione za swoje właściwości wykorzystywane są w celach leczniczych od dawna. Powstał zatem pomysł promowania miasta Tarnowa z wykorzystaniem tego owocu. Kilka lat temu pojawiła się „Tarninówka” jako nowy gadżet turystyczny, tarnowska herbata z tarniny. Herbata z tarniny, z powodu obecności dużej ilości garbników oraz antocyjanów w tej roślinie, ma charakterystyczny smak, barwę oraz aromat [28]. Oprócz walorów smakowych, napój ten ma wiele właściwości leczniczych, przede wszystkim poleca się go na wzmocnienie naturalnej odporności osobom często chorującym, pracującym umysłowo oraz wyczerpanym. Dodatkowo oczyszcza organizm z szkodliwych metabolitów, reguluje pracę żołądka oraz jelit. Tarnina należy do najzdrowszych dzikich owoców, ze względu na dużą zawartość witaminy C oraz witaminy E, a także soli mineralnych takich jak wapń, magnez, fosfor, żelazo [29]. Ponadto jest bogata w kwasy organiczne, pektyny i antocyjany [16]. Jak większość produktów pochodzenia roślinnego zawiera też kwas szczawiowy, który ma właściwości antyodżywcze, dlatego niezwykle ważnym jest przestrzeganie wskazanego przez producenta czasu parzenia herbaty, aby jak najmniejsza ilość kwasu szczawiowego przedostała się do naparu [30, 31]. Dodatkowo warto spożywać produkty bogate w wapń, gdyż minerał ten wiąże wolne szczawiany [32, 33].

## Materiały i Metody

W opracowaniu poddano analizie kwiaty i owoce tarniny oznaczając w nich zawartość m.in. witaminy C, szczawianów, antocyjanów oraz garbników.

Zastosowano poniższe postaci tarniny:

- kwiaty
  - suszone w postaci naparu (3 g suszonych kwiatów zalewano 100 cm<sup>3</sup> wrzącej wody destylowanej i parzono 5 minut);
- owoce
  - suszone, z których przyrządzono, po ugotowaniu w wodzie destylowanej, wywar zwany „kompotem” (3 g suszonych owoców gotowano w 100 cm<sup>3</sup> wody destylowanej przez 15 minut);
  - mrożone, które ucierano w młynku (3 g mrożonych owoców ucierano z dodatkiem 10 cm<sup>3</sup> wody destylowanej);
- herbatkę „Tarninówkę” sporządzoną z owoców tarniny z dodatkiem kwiatów hibiskusa, produkt handlowy (pakowana w torebkach po 3 g).

Do oznaczeń wykorzystano poniższą aparaturę:

- Spektrofotometr FT-IR, model Nicolet iS5. W badaniach zastosowano jednodobiciową przystawkę ATR z kryształem diamentowym oraz 10-odbiciową horyzontalną przystawkę ATR z płytką z kryształami ZnSe, w oprawce z wglębnieniem do pomiaru cieczy.
- Spektrofotometr UV-VIS, model Helios Epsilon. Urządzenie wykorzystano do pomiarów w zakresie długości fali 350-800 nm, w celu oznaczenia witaminy C oraz antocyjanów w analizowanych próbkach.
- Wirówka, model MPW-312, wykorzystana do rozdzielania zawiesin.

**Witaminę C** w kwiatkach i owocach tarniny oznaczono stosując metodę miareczkową: jodometryczną i Tillmansa oraz metodą spektrofotometryczną.

Metoda jodometryczna opiera się na redukcji jodu przez kwas askorbinowy w kwaśnym środowisku i tworzeniu addycyjnego związku jodu ze skrobią o niebieskim zabarwieniu. Kwas askorbinowy ma bowiem właściwości redukujące i utlenia się do kwasu dehydroaskorbinowego. Potencjał redoks układu: kwas dehydroaskorbinowy-kwas askorbinowy wynosi 0,19 V i jest niższy od potencjału układu  $I_2/2I^-$  (0,53 V). Można więc oznaczyć zawartość kwasu askorbinowego miareczkując bezpośrednio próbkę mianowanym roztworem jodu wobec skrobi jako wskaźnika.

Metoda Tillmansa opiera się na redukcji barwnika 2,6-dichlorofenoloindofenolu (DCIP) za pomocą kwasu askorbinowego do bezbarwnej postaci. Barwnik w środowisku kwaśnym przyjmuje różowe zabarwienie. Natomiast po utlenieniu DCIP zachodzi reakcja z jodkiem potasu z wydzieleniem odpowiedniej ilości jodu, który następnie miareczkuje się tiosiarczanem sodu. Metoda Tillmansa jest prosta, ale tylko w przypadku roztworów bezbarwnych i niezawierających innych związków powodujących redukcję odczynnika Tillmansa.

Oznaczenie spektrofotometryczne witaminy C według normy PN-90/A-75101/11 opiera się na reakcji utlenienia kwasu l-askorbinowego do kwasu dehydroaskorbinowego w kwaśnym środowisku pod wpływem 2,6-dichlorofenoloindofenolu. Roztwór barwnika dodawany jest w nadmiarze, następnie ekstrahuje się go, używając ksylenu i oznacza spektrofotometrycznie przy długości fali  $\lambda=500$  nm.

W opracowaniu podjęto także próbę oceny ilościowej zawartości witaminy C za pomocą spektroskopii absorpcyjnej w podczerwieni.

**Antocyjany** będące barwnikami roślinnymi należą do licznej rodziny flawonoidów. Odpowiadają za wszystkie odcienie barw od czerwonej do niebieskiej, zatem można mieć pewność ich występowania także w owocach tarniny. Barwniki antocyjanowe analizowano metodą spektrofotometryczną, gdyż charakteryzują się wysokim molarowym współczynnikiem absorpcji. Oznaczenie polegało na wykorzystaniu różnicy absorbancji roztworu zawierającego antocyjany przy pH=2 (barwna postać) i 4,5 (bezbarwna postać).

**Garbniki roślinne** to wielkocząsteczkowe polifenole, zawierające liczne grupy hydroksylowe. Wyróżniają się charakterystycznymi właściwościami fizykochemicznymi m.in. z białkami tworzą nierozpuszczalne i trwałe połączenia oraz aglutynują czerwone krwinki. Dobrze rozpuszczają się w wodzie, acetonie i niższych alkoholach. Garbniki odpowiadają za cierpki i ściągający smak naparów. Oznaczenie garbników wykonano metodą miareczkowo-wagową, która polega na tworzeniu nierozpuszczalnych połączeń garbników z solami miedzi(II) oraz oznaczeniu nadmiaru dodanej miedzi poprzez miareczkowanie roztworem tiosiarczanu sodu do momentu zmiany zabarwienia z brązowo-niebieskiego na białe.

**Szczawiany** zaliczane są do związków antyodżywczych, gdyż wywierają ujemny wpływ na wchłanianie i retencję wapnia, a w konsekwencji na bilans tego minerału w ustroju. W skrajnych przypadkach wiązanie jonów wapniowych w płynach ustrojowych przez kwas szczawiowy może doprowadzić do hipokalcemii. Z tych powodów, spożywanie produktów bogatych w szczawiany nie jest wskazane. Oznaczenie szczawianów metodą manganometryczną polega na strąceniu osadu szczawianu wapnia roztworem chorku wapnia. Dodatek acetonu oraz zastosowanie niskiej temperatury ułatwia tworzenie się osadu. Następnie otrzymany osad rozpuszcza się na gorąco w roztworze kwasu siarkowego(VI), po czym miareczkuje się otrzymany gorący roztwór manganianem(VII) potasu. Ostatnim etapem jest obliczenie ilości rozpuszczalnego kwasu szczawiowego w mg/100 g produktu. Przyjmuje się założenie, że 1 cm<sup>3</sup> 0,02 M roztworu manganianu(VII) potasu odpowiada 0,9 mg kwasu szczawiowego.

## Wyniki i dyskusja

W celach porównawczych zawartość witaminy C w analizowanych próbkach zbadano przy użyciu trzech metod: jodometrycznej, Tillmansa i spektrofotometrycznej. Każdorazowo podjęto próbę analizy zarówno suszonych kwiatów tarniny, owoców (mrożonych i suszonych), jak również herbaty „Tarninówka”.

W metodzie jodometrycznej oznaczono miano roztworu jodu, a następnie przygotowano próbki do oznaczeń. Przygotowano próbki z suszonych kwiatów, jak również owoców oraz herbatę „Tarninówkę”. W tym celu surowiec parzono przez 10 minut, po czym napar przesączono. Następnie do naparu dodano kwas siarkowy (VI) i miareczkowano roztworem jodu wobec skrobi jako wskaźnika do pojawienia się trwałej niebieskiej barwy.

Próba oznaczenia zawartości witaminy C metodą jodometryczną w herbacie „Tarninówka” oraz „kompocie” z suszonych owoców tarniny była znacznie utrudniona z uwagi na intensywne zabarwienie roztworów. W tej sytuacji wyznaczono punkt końcowy miareczkowania obserwując zmianę zabarwienia roztworu na zdecydowanie bardziej intensywną.

Kolejno obliczono zawartość kwasu askorbinoowego w mg/100 g produktu (Tab. 1) zakładając, że 1 cm<sup>3</sup> roztworu jodu o stężeniu 0,05 mol/dm<sup>3</sup> odpowiada 8,81 mg witaminy C.

Oznaczając witaminę C metodą Tillmansa na wstępie wykonano oznaczenie miana roztworu 2,6-dichlorofenoloindofenolu. Kolejno przygotowano analizowane próbki do oznaczeń. Surowce (kwiaty, owoce, herbata „Tarninówka”) parzono przez 10 minut. Następnie odmierzoną ilość roztworów przeniesiono ilościowo do kolby miarowej i uzupełniono kwasem szczawiowym do kreski, po czym przesączono. Pobrano przesącz do kolby stożkowej i miareczkowano roztworem barwnika do pojawienia się różowej barwy utrzymującej się 10 sekund.

Próba oznaczenia zawartości witaminy C metodą Tillmansa w owocach jak i herbacie „Tarninówka” była znacznie utrudniona z uwagi na intensywne zabarwienie roztworów. W tej sytuacji wyznaczono punkt końcowy miareczkowania obserwując zmianę zabarwienia roztworu na zdecydowanie bardziej intensywną, która utrzymywała się 10 sekund. W tabeli 2 przedstawiono wyniki oznaczenia witaminy C metodą Tillmansa.

Oznaczając witaminę C metodą spektrofotometryczną na wstępie przygotowano próbki do oznaczenia. W tym surowce parzono przez 10 minut. Inne postępowanie było w przypadku suszonych owoców tarniny, które gotowano przez okres 10 minut. Uzyskano w ten sposób tzw. „kompot”. Kolejno odważono roztwory i przeniesiono ilościowo do kolb miarowych. Owoce mrożone roztało w mrożdziejku z dodatkiem 2% kwasu szcza-

**Tabela 1.** Zawartość witaminy C wyznaczona metodą jodometryczną

Badana próbka tarniny	Zawartość witaminy C [mg/100g próbki]
Napar z suszonych kwiatów	1,17
„Kompot” z owoców tarniny	3,12
Herbata „Tarninówka”	3,70

**Tabela 2.** Zawartość witaminy C wyznaczona metodą Tillmansa

Badana próbka tarniny	Zawartość witaminy C [mg/100g próbki]
Napar z suszonych kwiatów	1,12
„Kompot” z owoców tarniny	3,15
Herbata „Tarninówka”	3,88

wiowego. Każdą kolbę miarową z roztworem uzupełniono kwasem szczawiowym do kreski, a po 15 minutach przesączono. Następnie pobrano przesącz, dodano buforu o pH=4,0 oraz nadmiar 2,6-dichlorofenoloindofenolu. Kolejno dodano ksylen i wytrząsano próbki. Ksylen nie miesza się z wodą, dlatego otrzymano rozdzielone warstwy, gdzie nadmiar 2,6-dichlorofenoloindofenolu zabarwił warstwę organiczną. Po rozdzieleniu się warstw, dla zabarwionej warstwy ksylenu, zmierzono absorbancję przy  $\lambda=500$  nm, stosując ksylen jako odnośnik. Aby określić zawartość witaminy C na podstawie zmierzonych absorbancji konieczne było wykonanie krzywej kalibracyjnej zależności absorbancji od ilości dodanego 2,6-dichlorofenoloindofenolu. Korzystając z wyznaczonego równania prostej obliczono nadmiar dodanego barwnika do próbek badanych i uzyskano ilość 2,6-dichlorofenoloindofenolu, która przereagowała z kwasem L-askorbinowym. Oznaczoną zawartość witaminy C w badanych produktach przedstawiono w tabeli 3.

Przeprowadzone badania potwierdzają, że spadek ilości witaminy C w owocach ma związek z temperaturą oraz czasem ich przechowywania, a jeszcze większy ubytek kwasu askorbinowego notuje się w owocach suszonych [29]. Dlatego w analizowanym „kompocie” z suszonych tarek znajduje się zaledwie 3,29 mg witaminy na 100 g roztworu. „Tarninówka” natomiast zawiera jej więcej (4,57 mg/100 g), co może mieć związek z wykorzystywaniem świeżych owoców tarniny do jej produkcji oraz obecności hibiskusa w jej składzie, również bogatego w witaminę C. Ponadto duży wpływ na obniżenie zawartości kwasu askorbinowego w badanej herbacie „Tarninówka” oraz „kompocie” miała z pewnością obróbka termiczna. Witamina C jest bowiem szczególnie wrażliwa na wysoką temperaturę. Najmniejsza ilość witaminy C została stwierdzona w naparze z suszonych kwiatów i rzeczywiście brak jest informacji w literaturze o występowaniu witaminy C w kwiatach tarniny.

Biorąc pod uwagę trudności, na jakie napotkano podczas oznaczeń witaminy C trzema metodami

**Tabela 3.** Zawartość witaminy C wyznaczona metodą spektrofotometryczną

Badana próbka tarniny	Zawartość witaminy C [mg/100g próbki]
Napar z suszonych kwiatów	1,26
Herbata „Tarninówka”	4,57
„Kompot” z suszonych owoców	3,29
Mrożone owoce	6,32

Na podstawie oznaczeń spektrofotometrycznych można wyciągnąć wniosek, iż najwyższa zawartość witaminy C znajduje się w mrożonych owocach (6,32 mg/100g). Dane literaturowe wskazują na wyższą wartość (17 mg/100 g). Niemniej jednak na znacznie mniejszą ilość kwasu askorbinowego w badanych mrożonych owocach z pewnością miał wpływ sposób ich przechowywania. Tarki były mrożone przez okres 4 miesięcy w temperaturze  $-18^{\circ}\text{C}$ . Dodatkowo zostały zebrane w grudniu i były już w znacznym stopniu wysu-

(intensywny kolor roztworu), jedynie dla suszonych kwiatów tarniny można porównać zawartość witaminy C wyznaczoną wszystkimi metodami. W tabeli 4 zebrano porównawczo wyznaczone zawartości witaminy C trzema metodami w naparze z suszonych kwiatów tarniny.

Wyniki w tabeli 4 są porównywalne, co ma związek z wykorzystaniem we wszystkich stosowanych metodach redukującego charakteru kwasu askorbinowego. Należy jednak pamiętać, że w badanym materiale mogły się znajdować rów-

**Tabela 4.** Zawartości witaminy C oznaczone w naparze z suszonych kwiatów tarniny

Stosowana metoda	Zawartość witaminy C [mg/100g próbki]
Metoda jodometryczna	1,17
Metoda Tillmansa	1,12
Metoda spektrofotometryczna	1,26

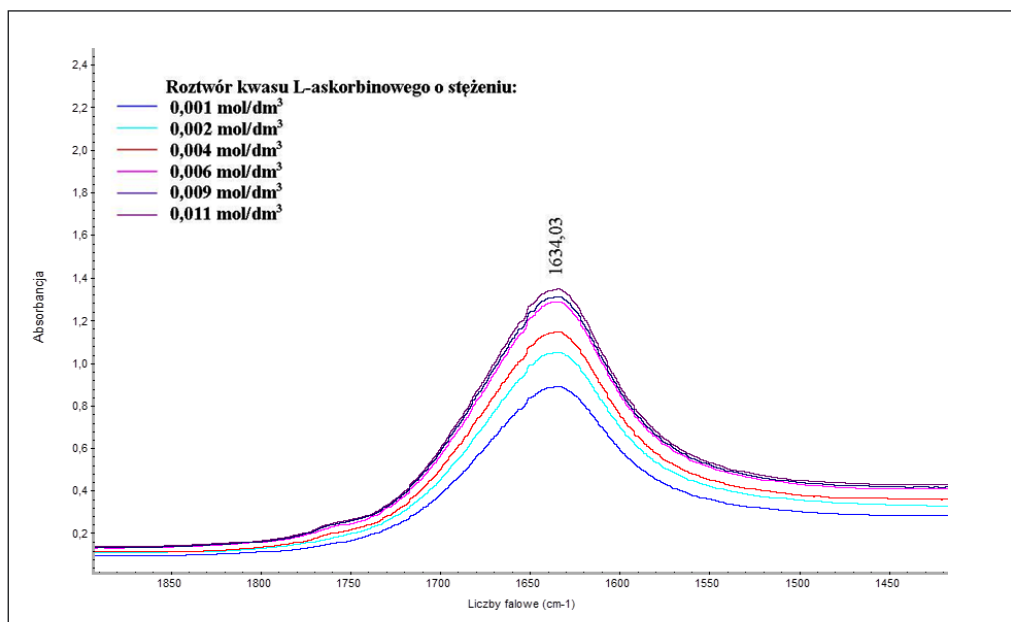
niez inne związki o właściwościach redukujących, które mogły wpłynąć na ostateczny wynik.

W celu ilościowego określenia witaminy C wykonano także pomiar widma absorpcyjnego w podczerwieni. Po analizie widma w podczerwieni kwasu askorbinowego i mając na uwadze takie widmo dla wody, ostatecznie dla celów pomiarowych wybrano pik, dla którego liczba faliowa wynosi  $1634,03\text{ cm}^{-1}$ . Wykonano krzywą kalibracyjną dla roztworów kwasu L-askorbinowego w wodzie destylowanej. W tym celu zarejestrowano widma dla serii roztworów kwasu askorbinowego i wyznaczono pole powierzchni bezwzględnej pików przy ustalonej liczbie faliowej dla każdego z roztworów (Rys. 1), po czym wykreślono krzywą wzorcową zależności powierzchni pików od

stężenia kwasu askorbinowego.

W kolejnym etapie przygotowano próbki do oznaczeń. Surowce parzono przez 10 minut. Inne postępowanie było w przypadku suszonych owoców tarniny, które gotowano przez okres 10 minut. Uzyskano w ten sposób tzw. „kompot”. Dla wszystkich próbek wykonano widmo w podczerwieni oraz zmierzono powierzchnię bezwzględną pików przy liczbie faliowej  $1634\text{ cm}^{-1}$ . Na podstawie równania krzywej kalibracyjnej oraz zmierzonych powierzchni pików obliczono stężenie kwasu L-askorbinowego w analizowanych naparach. Wyniki zestawiono w tabeli 5.

Uzyskane wyniki są porównywalne z wynikami uzyskanymi metodą spektrofotometryczną UV-VIS.



**Rysunek 1.** Fragment widma w podczerwieni serii roztworów kwasu askorbinowego z analizowanym pikiem dla którego liczba faliowa wynosi  $1634,03\text{ cm}^{-1}$



**Tabela 5.** Zawartość witaminy C wyznaczona metodą spektroskopii w podczerwieni

Badana próbka tarniny	Zawartość witaminy C [mg/100g naparu]
Napar z suszonych kwiatów	1,26
Herbata „Tarninówka”	4,42
„Kompot” z suszonych owoców	3,21

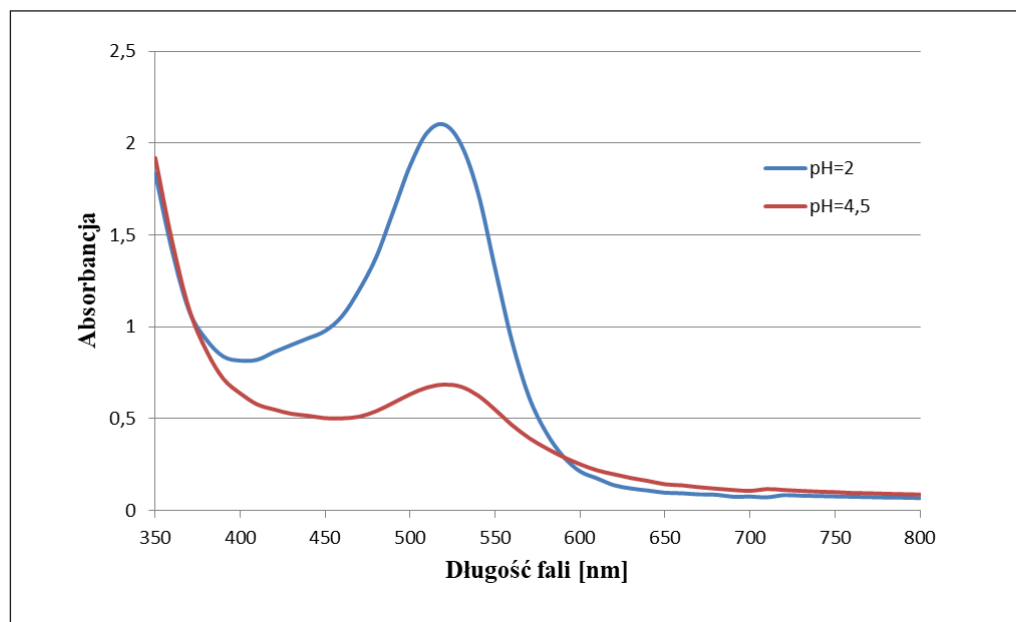
Celem oznaczenia zawartości **antocyjanów** na wstępie przygotowano próbki do oznaczeń. Torebkę herbaty „Tarninówki” oraz suszone kwiaty parzono przez 10 minut. Inne postępowanie było w przypadku suszonych owoców tarniny. Owoce gotowano przez okres 10 min. Uzyskano w ten sposób tzw. „kompot”. Natomiast mrożone owoce roz tarto w mrożeniu z niewielkim dodatkiem wody destylowanej

Kolejno pobrano napary z „Tarninówki”, suszonych kwiatów tarniny, „kompot” z suszonych owoców oraz homogenat z mrożonej tarniny i przeniesiono ilościowo do kolb miarowych. Roztwory uzupełniono do kreski buforem o pH=2. W identyczny sposób przygotowano roztwory z buforem o pH=4,5. Następnie wyko-

nano widma sporządzonych roztworów w zakresie 350-800 nm, wobec wody destylowanej jako odnośnika.

Dla herbaty „Tarninówki” sporządzono wykres (Rys. 2) zależności absorbancji od długości fali w zakresie 350-800 nm.

Zawartość procentowa antocyjanów w herbacie „Tarninówka” w przeliczeniu na cyjanidyno-3-glukozyd wynosi  $6,00 \cdot 10^{-6} \%$ . Jest to dość duża wartość, dlatego zapewnienie producenta o bogactwie herbaty w antocyjany znajduje potwierdzenie. Uzyskany wynik jest nieco mniejszy od danych literaturowych, jednak należy pamiętać, że owoce tarniny zostały poddane obróbce podczas produkcji herbaty oraz podczas przygotowywania naparu. W składzie herbaty „Tarninówka” występują

**Rysunek 2.** Wykres zależności absorbancji od długości fali dla herbatki „Tarninówka”

ponadto kwiat hibiskusa, również bogaty w antocyjany.

Pozostałe próbki nie wykazały żadnej absorpcji, co wskazuje na brak obecności antocyjanów w ich składzie. Kwiaty tarniny są koloru białego, nie posiadają żadnego barwnika, dlatego brak pasm w widmie naparu z suszonych kwiatów jest uzasadniony. Natomiast w pozostałych próbkach tj. „kompocie” z suszonych owoców i mrożonych tarkach prawdopodobny wpływ na brak antocyjanów miał fakt, że związki te są bardzo wrażliwe, m. in. na temperaturę oraz utlenianie. Stąd możliwe, że uległy rozkładowi w wyniku mrożenia oraz suszenia owoców.

Celem oznaczania zawartości **szczawianów** na wstępie przygotowano próbki do oznaczeń. Torbki herbaty „Tarninówka” oraz suszone kwiaty zalano wodą o temperaturze 100°C i parzono przez okres 10, 15 i 30 minut. Producent zarówno „Tarninówki” jak i suszonych kwiatów zaleca 10-15 minut parzenia. Wydłużono zatem czas do 30 minut celem sprawdzenia zawartości szczawianów po dłuższym czasie parzenia. Następnie pobrano napary do próbek wirówkowych, dodano chlorku wapnia oraz acetonu i po ochłodzeniu odwirowano. Kolejno zlano roztwór znad osadu, a osad przeniesiono ilościowo za pomocą kwasu siarkowego(VI) do kolby stożkowej i rozpuszczono w gorącej łaźni wodnej. Miareczkowano roztworem  $\text{KMnO}_4$  do pojawienia się różowego

zabarwienia utrzymującego się 1 minutę. Pomiar wykonano dla wszystkich naparów „Tarninówki” oraz naparów z suszonych kwiatów. Ostatnim etapem było obliczenie ilości rozpuszczalnego kwasu szczawowego w mg/100 g produktu. Przyjęto założenie, że 1 cm<sup>3</sup> 0,02 M roztworu manganianu(VII) potasu odpowiada 0,9 mg kwasu szczawowego. W tabeli 6 zebrano zawartości szczawianów w badanych naparach „Tarninówki” i suszonych kwiatów.

Biorąc pod uwagę dane literaturowe można stwierdzić, iż badane produkty zawierają niewielką ilość szczawianów. Herbata „Tarninówka” zawiera ich o połowę mniej w porównaniu z naparem z suszonych kwiatów, jednak należy pamiętać, że do analizy odważono 3 g ziół, a producent zaleca zalanie 1 łyżeczki suszonych kwiatów 200 cm<sup>3</sup> wrzątku. Łyżeczka taka waży około 0,5 g.

Producent zarówno herbaty „Tarninówka” jak i suszonych kwiatów tarniny zaleca ich parzenie przez okres 10-15 minut. Jednak konsumenci często przedłużają czas ich parzenia, co wiąże się z dłuższym okresem ekstrakcji rozpuszczalnych związków do naparu. Jak pokazują wyniki doświadczenia, przedłużenie czasu parzenia wpływa na zwiększenie ilości szczawianów w badanych naparach. Większy wzrost ilości zanotowano dla herbaty „Tarninówki”, pomimo mniejszej ogólnej ich zawartości w porównaniu do naparu z suszonych kwiatów.

**Tabela 6.** Zawartość szczawianów w naparach herbatki „Tarninówka” i naparach z suszonych kwiatów w zależności od czasu parzenia

Badany napar	Czas [min]	Zawartość szczawianów	
		[mg/100cm <sup>3</sup> naparu]	[mg/100 g produktu]
Napar z suszonych kwiatów	10	4,50	140,6
	15	6,75	210,9
	30	8,25	257,8
Herbata „Tarninówka”	10	2,25	70,3
	15	3,75	117,2
	30	8,25	257,8

W celu oznaczenie **garbników** w analizowanych produktach odważono surowce i zalano wodą destylowaną. Następnie napary ogrzewano powoli, a kiedy zawrzały, odstawiono je do ostygnięcia. Roztwory przesączono przez watę do kolb miarowych. Następnie surowce ponownie zalano wodą destylowaną, ogrzano do wrzenia i gotowano przez okres 10 minut, po czym ponownie przesączono przez tę samą watę. Po schłodzeniu naparów, powtórnie przesączono wyciąg wodny do kolby miarowej i uzupełniono wodą destylowaną do kreski. Do odmierzonych ilości roztworów dodano octanu miedzi i pozostawiono na okres około 24 godzin w celu wytrącenia osadu. Po upływie tego czasu osady odsączono na zważonym sączku. Przesącz odstawiono, a osad przemyto wodą destylowaną, aż do negatywnej reakcji na obecność jonów miedzi. Osady suszono w temperaturze około 100 °C do uzyskania stałej masy.

Następnie do kolb stożkowych odmierzono przesącz, dodano kwas siarkowy(VI) oraz jodek potasu i roztwór skrobi. Roztwory miareczkowano tiosiarczanem sodu do zaniku ciemnoniebieskiego zabarwienia. Wykonano również próbę kontrolną w ten sam sposób zastępując przesącz wodą destylowaną. Na podstawie otrzymanego wyniku obliczono zawartość garbników w % wagowych. W tabeli 7 zebrano obliczone zawartości garbników dla analizowanych produktów.

Z literatury wiadomo, iż kwiaty tarniny są bogate w (+)-katechinę i (-)-galusan epikatechiny. Informacje te potwierdziły badania, gdyż napar z suszonych kwiatów zawiera więcej garbników w porównaniu z „Tarninówką”. Garbniki są bardzo cennym składnikiem herbat i naparów z ziół, gdyż wykazują działanie przeciwutleniające,

przeciwbakteryjne, przeciwzapalne i przeciwbiegunkowe. Jednak należy zachować umiar w ich dostarczaniu organizmowi, gdyż w większych ilościach powodują zakłócenia w wchłanianiu witamin takich jak A, B12 oraz żelaza, przyczyniając się do anemii.

## Podsumowanie

Przeprowadzone badania potwierdzają, iż tarnina jest bardzo cennym surowcem leczniczym. Nie bez powodu już od najdawniejszych czasów była wykorzystywana w medycynie ludowej. Zarówno kwiaty jak i owoce tarniny bogate są w witaminę C. Najwyższa jej zawartość okazała się być w owocach świeżych, zebranych w ostatnim momencie przed zimą z krzewów i zamrożonych do czasu ich analizy. Mniejsze ilości oznaczono w naparze z suszonych kwiatów jak i w przygotowanym „kompocie” z suszonych owoców tarniny. Z pewnością fakt obróbki termicznej w wysokiej temperaturze miał istotny wpływ na obniżenie zawartości tej witaminy. Jest ona bowiem szczególnie wrażliwa na wysoką temperaturę i częściowo rozkłada się. Także w herbatce „Tarninówka” oznaczono stosunkowo dużą zawartość witaminy C, mimo przygotowywania jej także w wysokiej temperaturze. Jednak nie można zapomnieć, iż w składzie tej herbatki obecne są także kwiaty hibiskusa, które również są bogate w witaminę C.

Herbata „Tarninówka” zawiera duże ilości antocyjanów. Świadczy o tym choćby jej intensywny czerwony kolor. Związki te jednak bardzo szybko ulegają rozkładowi w trakcie przechowywania. Są wrażliwe na temperaturę oraz proces suszenia. Z tego powodu w badanych produktach takich jak

**Tabela 7.** Obliczona zawartość garbników w badanych naparach

Badany produkt	Zawartość garbników [% wagowe]
Napar z suszonych kwiatów tarniny	0,9
Herbata „Tarninówka”	0,6

mrożone owoce oraz „kompot” z suszonych terek, nie wykazano obecności antocyjanów. Podobnie w naparze z suszonych kwiatów nie oznaczono obecności antocyjanów, czego można było spodziewać się z powodu białego koloru ich kwiatów.

Napar z suszonych kwiatów oraz herbata „Tarninówka” zawierają znaczne ilości garbników, przy czym większą ilość oznaczono w naparze z kwiatów. W literaturze można znaleźć informacje o bogactwie tego typu związków właśnie w kwiatach tarniny.

Herbata „Tarninówka” oraz napar z suszonych kwiatów tarniny charakteryzują się małą zawartością szczawianów. Jest to istotny fakt, gdyż szczawiany należą do składników tzw. antyodżywczych, ich obecność w nadmiarze może powodować wytrącanie się szczawianu wapnia, prowadzące m.in. do kamicy nerkowej. Ponadto dowiedziono iż czas parzenia ma istotny wpływ na zawartość szczawianów w naparach. Wydłużenie czasu parzenia ponad proponowany przez producentów spowodowało przyrost zawartości oznaczanych rozpuszczalnych szczawianów, zwłaszcza w herbacie „Tarninówka”. Oznacza to, że należy przestrzegać sugerowany przez producenta czas parzenia oraz unikać pozostawiania po tym czasie torebki w naparze. Dodatkowo warto spożywać produkty bogate w wapń, gdyż minerał ten wiąże wolne szczawiany.

## Literatura

1. W. Seneta, J. Dolatowski, Dendrologia, PWN, Warszawa 1997.
2. J. Mowszowicz, Pospolite rośliny naczyniowe Polski, PWN, Warszawa 1983.
3. J. D. Godet, Przewodnik do rozpoznawania drzew i krzewów. Wyd. Oficyna Wydawnicza „Delta W-Z”, Warszawa 1997.
4. R. Krzyściak-Kosińska, M. Kosiński, Atlas roślin, Wydawnictwo Pascal, Bielsko-Biała 2007.
5. W. Szafer, B. Pawłowski, Flora Polska, Tom VII,

PWN, Kraków 1955.

6. T. Marakoğlu, D. Arslan, M. Özcan, H. Haciseferoğulları, *Journal of Food Engineering*, 2005, **68**, 137-142.
7. R. Guimaraes, L. Barros, M. Duenas, A. M. Carvalho, M. J. Queiroz, C. Santos-Buelga, I. Ferreira, *Food Chemistry* 2013, **141**, 3721-3730.
8. L. Barros, A. Carvalho, J. Sá Morais, I. Ferreira, *Food Chemistry* 2010, **120**, 247-254.
9. J. M. Veličković, D. A. Kostić, G. S. Stojanović, S. S. Mitić, M. N. Mitić, S. S. Randelović, A. S. Đorđević, *Phenolic composition, antioxidant and antimicrobial activity of the extracts from Prunus spinosa L. fruit*. W: University of Niš, Department of Chemistry, Faculty of Sciences and Mathematics, Niš, Serbia 2014, **68**(3), s. 297-303.
10. J. Volák, J. Stodola, Rośliny lecznicze. Wyd. Polska Oficyna Wydawnicza BGW, Warszawa 1983.
11. E. Lamer-Zarawska, B. Kowal-Gierczak, J. Niedworok, Fitoterapia i leki roślinne, Wydawnictwo Lekarskie PZWL, Warszawa 2007.
12. L. Antkowiak, Rośliny lecznicze, Wydawnictwo Akademii Rolniczej w Poznaniu, Poznań 1998.
13. Y. Kumarasamy, P.J. Cox, M. Jaspars, L. Nahar, S. D. Sarker, *Cyanogenic glycosids from Prunus spinosa (Rosaceae)*. W: Pergamon, Biochemical Systematics and Ecology 2003, **31**, s. 1063-1065.
14. M. Balcerek, J. S. Szopa, M. Adamczyk, Kineetyka powstawania cyjanowodoru w procesie fermentacji zacierów z owoców tarniny (1). W: Przemysł Fermentacyjny i Owocowo-Warzywny 2003, tom 47, nr 11, s. 24-26. Zakład Technologii Spirytusu i Drożdży, Instytut Technologii Fermentacji i Mikrobiologii, Politechnika Łódzka, Łódź.
15. M. Balcerek, J. S. Szopa, M. Adamczyk, Kineetyka powstawania cyjanowodoru w procesie fermentacji zacierów z owoców tarniny (2). W: Przemysł Fermentacyjny i Owocowo-Warzywny

- ny 2003, tom 47, nr 12, s. 21-23. Zakład Technologii Spirytusu i Drożdży, Instytut Technologii Fermentacji i Mikrobiologii, Politechnika Łódzka, Łódź.
16. W. Palczewska, A. Owczarek, Tarnina – zapomniany surowiec farmaceutyczny. W: Wiadomości zielarskie 2002, tom 44, nr 5, s. 12. Młoda farmacja, Wydział Farmaceutyczny Akademii Medycznej we Wrocławiu.
  17. Y. Kumarasamy, P. J. Cox, M. Jaspars, L. Nahar, S. D. Sarker, *Fitoterapia* 2004, **75**, 77-80.
  18. A. Niedojadło, Encyklopedia Tarnowa. Wyd. Tarnowskie Towarzystwo Kulturalne, Tarnów 2010.
  19. W. Ziobro, Tarnów i okolice. Szlakiem tajemnic i ciekawostek. Wyd. MIL24, Tarnów 2014.
  20. A. Pragłowska, Wizytówki miasta Tarnowa. Wyd. S-CAN, Tarnów 2005.
  21. K. Bańburski, A. Szpunar, To właśnie Tarnów – Wiele Tarnowianie. Wyd. S-CAN, Tarnów 2013.
  22. Opracowanie zbiorowe, B. Jaśkiewicz [et al.], red. S. Potępa, Tarnów – Stare Miasto, Wielki Przewodnik, T. 1, Wyd. Tarnowskie Towarzystwo Kulturalne, Muzeum Okręgowe w Tarnowie, Tarnów 1994.
  23. Akt lokacyjny miasta Tarnowa (<http://tarnowskikurierkulturalny.blox.pl/2012/03/682-rocznica-lokacji-miasta-Tarnowa.html>) [02.02.2017].
  24. R. Iwaniec, Tarnów i jego okolice w legendach. Wyd. Miejska Biblioteka Publiczna im. Juliusza Słowackiego, Tarnów 1998.
  25. S. Potępa, Przewodnik po Tarnowie. Wyd. Muzeum Okręgowe w Tarnowie, Tarnów 1982.
  26. E. Stadtmüller, Legendy tarnowskie. Wyd. S-CAN, Tarnów 2011.
  27. J. Łabno, O nowej próbie wyjaśnienia nazwy Tarnów. W: Tarniny, 1993, 3, s.26.
  28. A. J. Lack, D. E. Evans, *Biologia roślin. Krótkie wykłady*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003.
  29. J. Skręty, A. Gramza-Michałowska, A. Sidor, J. Korczak, Wpływ wybranych warunków przechowywania na zawartość witaminy C w owocach róży pomarszczonej *Rosa rugosa*. Katedra Technologii Żywności Człowieka, Uniwersytet Rolniczy w Poznaniu. W: Probl Hig Epidemiol 2013, 94(4), s. 869-972.
  30. B. Sperkowska, G. Bazylak, Wpływ warunków ekstrakcji na zawartość rozpuszczalnych szczawianów w wodnych naparach herbat zielonych i herbatek ziołowych. W: Żywność. Nauka. Technologia. Jakość, 2010, 4(71), s. 107-121.
  31. P. Dmowski, M. Śmiechowska, B. Deja, Wpływ warunków zaparzenia na zawartość garbników oraz wybranych parametrów barwy herbaty. W: Zeszyty Naukowe Akademii Morskiej w Gdyni, 2011, 68, s. 5-12.
  32. E. Jabłońska-Ryś, Wpływ sposobu parzenia różnych rodzajów herbat na zawartość w nich szczawianów rozpuszczalnych. W: Żywność. Nauka. Technologia. Jakość, 2012, 1(80), s. 187-185.
  33. B. Sperkowska, G. Bazylak, *Bromatologia i Chemia Toksykologiczna*, XLIII, 2010, **2**, 130-137.



# Oznaczanie ceru w kamieniach do zapalniczek metodą spektrofotometrii Uv-Vis

## Determination of cerium in ferrocerium lighter flint stone using Uv-Vis spectrophotometry

Krzysztof Kleszcz<sup>a,\*</sup>, Martyna Mika<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Tarnowie, ul. Mickiewicza 8, 33-100 Tarnów, Polska*

\*Corresponding author: k\_kleszcz@pwsztar.edu.pl

---

### Streszczenie

W pracy opisano pomiar zawartości ceru w kamieniach do zapalniczek metodą spektrofotometryczną, która wykorzystuje tworzenie barwnego kompleksu ceru z formaldoxymem. W celu uzyskania wiarygodnych wyników, konieczne okazało się oddzielenie obecnego w próbkach żelaza. Dokonano tego wykorzystując metodę wytrącania szczawianu ceru.

**Słowa kluczowe:** Cer, spektrofotometria, współstrącanie

### Abstract

Determination of cerium in ferrocerium lighter flint stone by means of spectrophotometry is described. The method is based on the formation of cerium-formaldehyde complex. In order to achieve accurate results, it was necessary to separate iron which was present in the samples. It was achieved by precipitation of cerium oxalate.

**Key words:** Cerium, spectrophotometry, coprecipitation

---

### Wstęp

Skład chemiczny kamieni do zapalniczek jest w przybliżeniu znany, przy czym źródła internetowe (przeważnie trudne do weryfikacji) określają zawartość ceru na poziomie 40%. Celem niniejszej pracy było zbadanie ewentualnych różnic w składzie kamieni różnego pochodzenia, jak również ocena przydatności metody spektrofotometrycznej do badań tego typu materiałów.

Lantanowce, z uwagi na duży koszt rozdziału ich mieszanin, są stosowane głównie pod posta-

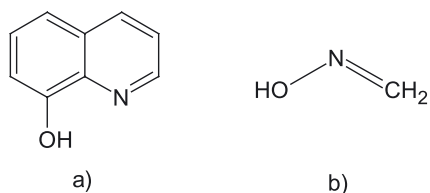
cią tak zwanych metali mieszanych (mieszmetali), o ile nie ma konieczności dysponowania czystym metalem. Mieszmetal otrzymuje się w wyniku elektrolizy stopionych chlorków lub tlenków lantanowców. Stopy te zawierają w przybliżeniu 50% Ce, 40% La, 7% Fe oraz 3% innych metali. Odnaczają się właściwościami piroforycznymi i znajdują zastosowanie w produkcji kamieni do zapalniczek [1]. Patent na produkcję mieszmetalów powstał w 1968 r., a jego podstawowym przedmiotem jest wyprodukowanie mieszanki zawierającej pierwiastki ziem rzadkich, których koncentracja

w tym produkcji jest bardzo wysoka [2]. Stąd też, kamienie do zapalniczek zawierają oprócz ceru spore ilości lantanu.

## Materiały i Metody

### Metody oznaczania ceru

Spśród spektrofotometrycznych metod oznaczania ceru najbardziej popularne są metody wykorzystujące 8-hydroksychinolinę oraz formaldoksym [3] (Rys. 1).



**Rysunek 1.** Wzór strukturalny 8-hydroksychinoliny (a) oraz formaldoksymu (b)

W niniejszej pracy wykorzystano metodę formaldoksymową, gdyż nie wymaga ona oddzielania innych lantanowców, które z formaldoksymem tworzą bezbarwne połączenia, zatem nie wpływają na pomiar. Ponadto, metoda z 8-hydroksychinoliną wymaga ekstrakcyjnego oddzielania kompleksu ceru. W metodzie formaldoksymowej jony ceru tworzą z formaldoksymem kompleks, który pod wpływem tlenu z powietrza przybiera zabarwienie pomarańczowe. Wiąże się to z utlenieniem  $Ce^{3+}$  do  $Ce^{4+}$ , przy czym powstaje jon o wzorze  $[Ce(CH_2NO)_6]^{2-}$ . W celu wywołania reakcji barwnej należy środowisko reakcji zakwalizować roztworem NaOH. Spśród pierwiastków przeszkadzających należy wymienić żelazo. Pierwsze przeprowadzone próby oznaczenia ceru zakończyły się niepowodzeniem; dopiero oddzielenie żelaza pozwoliło na poprawne wykonanie analizy.

### Próbki i aparatura

Kamienie do zapalniczek zakupiono w sklepach internetowych. Z powodu braku konkretnych nazw handlowych wybrano kamienie różniące się wizualnie, aby można było spodziewać się między nimi różnic.

Pomiary przeprowadzono na spektrofotometrze Spectroquant® Pharo 300 (Merck Millipore). Zgodnie z zaleceniami zawartymi w literaturze źródłowej [3], odczytywano absorbancję przy długości fali  $\lambda=400$  nm, choć nie jest to maksimum absorpcji badanego kompleksu (leży ono przy ok. 340 nm). W sekcji „wyniki i dyskusja” przedyskutowano krótko zagadnienie wyboru długości fali. Stosowano odczynniki czystości analitycznej i wodę dwukrotnie destylowaną. Roztwór wzorcowy ceru(III) do krzywej wzorcowej przygotowano z azotanu(V) ceru(III). Roztwór formaldoksymu o stężeniu 1 mol/dm<sup>3</sup> przygotowano z formaldehydu i chlorowodorku hydroksyloaminy [3].

### Przygotowanie próbek

Analizie poddano trzy różne próbki (oznaczone 1C, 2C, 3C), różniące się masami oraz barwą. Po zważeniu roztworzono każdą z nich w ok. 10 cm<sup>3</sup> 15% HCl, a powstałe roztwory przesączono przez watę szklaną.

Pobrano niewielkie, znane ilości każdego z roztworów, aby spodziewana zawartość ceru w każdej porcji nie była większa niż 1 mg. Przeniesiono do kolbki miarowej poj. 50 cm<sup>3</sup>, dodano 5 cm<sup>3</sup> roztworu formaldoksymu oraz 1-molowy roztwór NaOH w ilości 4 cm<sup>3</sup> ponad stan zobojętnienia (w sumie ok. 9 cm<sup>3</sup>). Następnie dopełniono wodą do kreski, wymieszano i odczekano 10 minut, po czym wykonano pomiar, stosując wodę jako odnośnik.

Wstępne pomiary wykazały obecność składników przeszkadzających, na co wskazywała barwa próbek, która w momencie pomiaru była inna niż barwa wzorców. Spodziewano się zatem, że obecne w próbkach żelazo może mieć negatywny



wpływ na pomiary (np. zaburzając procesy utleniania jonów ceru(III) do ceru(IV) podczas tworzenia barwnego kompleksu z formaldoxymem, lub też wytrącając się w postaci wodorotlenku). Konieczne okazało się oddzielenie żelaza, przy czym spośród dwóch metod branych pod uwagę (współstrącanie i wymiana jonowa), metoda strąceniowa dała lepsze wyniki.

W celu oddzielenia ceru od żelaza, pobrano niewielką część roztworu po rozтворzeniu każdego kamienia i dodano 1,5 cm<sup>3</sup> 5% r-ru kwasu szczawowego, po czym 2-molowym roztworem amoniaku zalkalizowano roztwory do pH ok. 3,5. W tych warunkach cer wytrąca się w postaci białego osadu szczawianu, a pozostałe obecne w próbie lantanowce pełnią rolę nośnika (również wytrącają się w tych warunkach, przez co zwiększają ilość osadu, co jest w tym przypadku korzystne, gdyż operowanie bardzo małą ilością osadu bywa kłopotliwe). Jony żelaza pozostają w roztworze w postaci kompleksów szczawianowych [4].

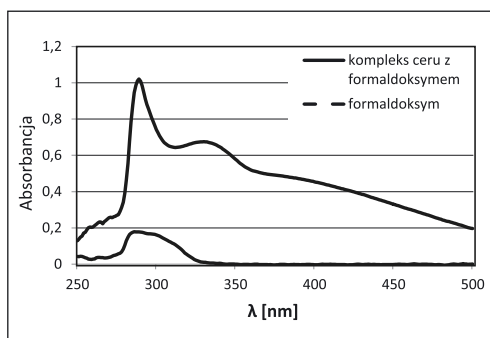
Osady odwirowano, oddzielono od roztworów, po czym rozтворzono je w ok. 15% HCl. Do roztworów uzyskanych w ten sposób dodano formaldoxym, zalkalizowano wodorotlenkiem sodu i wykonano pomiary. Równolegle wykonano dwie ślepe próby.

## Wyniki i Dyskusja

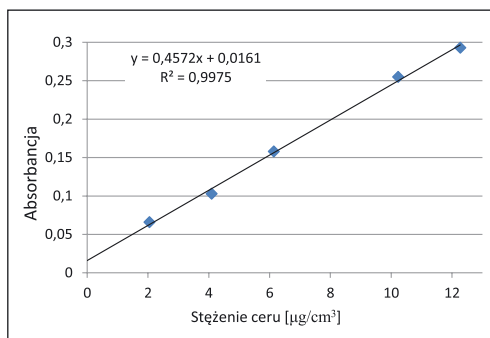
Rysunek 2 przedstawia widma kompleksu ceru z formaldoxymem oraz widmo samego formaldoxymu. Widać wyraźny wpływ samego formaldoxymu przy  $\lambda \sim 300$  nm, jednakże jest on już niewielki w maksimum absorpcji kompleksu, przy  $\lambda \sim 340$  nm. Niemniej jednak, pomiary wykonano przy długości fali  $\lambda = 400$  nm. Takie postępowanie daje powtarzalne i wiarygodne wyniki, na co wskazuje liniowość krzywej kalibracyjnej (Rys. 3).

Zastanawiający jest fakt pojawienia się wyraźnego maksimum absorpcji w próbce z utworzo-

nym kompleksem przy  $\lambda \sim 290$  nm. Jeśli przyjąć (za literaturą źródłową [3]), że maksimum absorpcji kompleksu z cerem leży przy ok 340 nm, to pasmo przy  $\lambda \sim 290$  nm jest albo wzmocnionym pasmem pochodzącym od samego formaldoxymu, albo pochodzi od zupełnie nowego układu absorbującego przy tej samej długości fali. Wydaje się, że pierwsza opcja jest bardziej prawdopodobna, a wzmocnienie absorpcji może być spowodowane ułatwieniem przejścia elektronowego pod wpływem zmiany struktury w momencie tworzenia kompleksu.



Rysunek 2. Widma formaldoxymu i jego kompleksu z cerem



Rysunek 3. Przykładowa krzywa kalibracyjna

Wyniki oznaczeń ceru w badanych próbkach, wraz z masą każdej próbki, przedstawiono w tabeli 1. Precyzja pomiarów wynosiła ok. 2%.

Są to wyniki bliskie spodziewanych, jednak widnieją tutaj pewne różnice pomiędzy próbkami. Sugeruje to, że skład kamieni do zapalniczek

**Tabela 1.** Zawartość ceru w badanych próbkach

Oznaczenie próbki	Masa [g]	Zawartość ceru [%]
1C	0,1345	43,25
2C	0,1139	33,48
3C	0,1226	46,72

może różnić się w zależności od miejsca produkcji, a co za tym idzie, składu stosowanych surowców. Ślepe próby przy długości fali 400 nm wykazały pomijalną absorbcję, zbliżoną do wody.

## Podsumowanie

Niniejsza praca wykazała różnice w składzie kamieni do zapalniczek różnego pochodzenia. Podczas oznaczeń konieczne okazało się oddzielenie składników przeszkadzających od oznaczanego pierwiastka, do czego z powodzeniem wyko-

rzystano metodę strąceniową. Przedyskutowano krótko widma badanych związków pod kątem wyboru długości fali odpowiedniej do wykonania pomiarów, która nie zawsze musi leżeć w maksimum. Metody spektrofotometryczne, choć bardzo proste w porównaniu do nowoczesnych technik instrumentalnych, mogą być z powodzeniem wykorzystane do badania złożonych materiałów.

## Literatura

1. W. Chorewicz (red.), Pierwiastki ziem rzadkich: Surowce Technologie Zastosowania, WNT, Warszawa 1990.
2. United States Patent 3, 383,294, 1968.
3. Z. Marczenko, Spektrofotometryczne oznaczanie pierwiastków, wydanie trzecie zmienione, PWN, Warszawa 1979, s. 215-219.
4. J. Lehto, X. Hou, Chemistry and analysis of radionuclides. Laboratory techniques and methodology, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. 2011, p. 59-64.

# Prawa limitacyjne Kornaia

## Kornai's Limitation Rules

Adam Janik<sup>a,\*</sup>

*<sup>a</sup>Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Tarnowie, ul. Mickiewicza 8, 33-100 Tarnów, Polska*

\*Corresponding author: adam.janik@im.uj.edu.pl

---

### Streszczenie

W książce [1] (tłumaczenie polskie [2]) János Kornai pokazał, jak gospodarka w ustroju socjalistycznym musi stać się gospodarką niedoboru czyli nienadążania podaży za popytem, a w książce [3] (tłumaczenie polskie [4]) opisał, jak gospodarka w ustroju kapitalistycznym musi stać się gospodarką nadmiaru czyli nienadążania popytu za podażą. Niestety, pojęcia kapitalizmu i socjalizmu są niejednoznaczne, więc w artykule w ich miejsce są wprowadzone dwa teoretyczne typy ustroju społeczno-gospodarczego. Następnie do takiego teoretycznego modelu zastosujemy twierdzenie limitacyjne Gödla i w ten sposób uzyskamy dychotomiczny podział na gospodarki niedoboru i nadmiaru.

W drugiej części artykułu pokażemy ponadto, że pojęcia niedoboru i nadmiaru można zastosować nie tylko do systemów gospodarczych, ale również do systemów prawnych.

**Słowa kluczowe:** ekonomia polityczna, gospodarka nadmiaru, gospodarka niedoboru, trzecia droga, państwo prawa, państwo sprawiedliwości, twierdzenie Gödla o niezupełności

### Abstract

János Kornai in [1] has shown why a socialistic economy should be an economy of shortage i.e. an economy where the supply does not keep up with the demand, and in [3] he has shown why a capitalistic economy should be a surplus economy i.e. an economy where the demand does not keep up with the supply. Unfortunately it is not quite clear what do the words socialism and capitalism mean, so instead of them two other theoretical types of polity are introduced.

Next we apply the Gödel limitation theorem to the introduced model of polity and so we obtain a dichotomic partition of all economies into economies of shortage and surplus economies.

In the second part of the article we apply the notions of shortage and surplus to a classification of state systems of law.

**Key words:** political economy, surplus economy, economics of shortage, third way, state of law, state of justice, Gödel's incompleteness theorem

---

## Wstęp

János Kornai przy wyprowadzaniu swoich praw przyjmował, że gospodarka może występować tylko w dwóch postaciach: jako system wolnorynkowy lub jako gospodarka centralnie sterowana. Takie zestawienie może sugerować, że mamy do czynienia z dwoma równorzędnymi wariantami działania i możemy sobie dowolnie wybrać jeden z nich.

Natomiast historia wyraźnie pokazała, że nie ma tu żadnej równoważności – gospodarka wolnorynkowa jest naturalnym i spontanicznym wynikiem ludzkiej działalności, natomiast gospodarka centralnie sterowana jest pomysłem teoretycznym, który trzeba wprowadzać siłą na podstawie decyzji politycznych, a więc ostatecznie to polityka decyduje o podejmowanych decyzjach gospodarczych.

Uzasadnia to następujące definicje dwóch ustrojów społeczno-politycznych:

- **ustrój rynkowy**, w którym podstawowym celem działalności członków społeczeństwa jest produkcja dóbr ekonomicznych (towarów i usług) i ich wymiana na inne dobra na wolnym rynku, natomiast idee są produkowane tylko w takim zakresie, jaki jest niezbędny do produkcji dóbr ekonomicznych;
- **ustrój ideologiczny**, w którym podstawowym celem działalności członków społeczeństwa jest rozwijanie pewnej ustalonej ideologii, natomiast dobra ekonomiczne są produkowane tylko w takim zakresie, jaki jest niezbędny do rozwijania tej ustalonej ideologii.

Pod pojęciem ideologii należy tutaj rozumieć taki zespół idei i pojęć, dla którego istnieje dokładnie jeden człowiek decydujący, co jest zgodne z daną ideologią, a więc jedynie słuszne i prawdziwe. Taki dyktator jest niezbędny, gdyż na ogół ideologia ustrojowa nie ma postaci skodyfikowanej i zmienia się w zależności od okoliczności. Jak głosiła Historia WKP(b) (Krótki kurs): „Teoria marksistowsko-leninowska nie jest dogmatem,

lecz wytyczną działania” [5]. Wprawdzie nie istnieje żadne państwo o ustroju dokładnie pierwszego lub drugiego typu, ale każdy realnie istniejący ustrój można jednoznacznie przypisać do jednego z dwóch wprowadzonych typów. W szczególności, państwa kapitalistyczne można przypisać do typu rynkowego, podczas gdy państwa realnego socjalizmu, III Rzesza Hitlera i Włochy Mussoliniego były państwami typu ideologicznego.

Powyższe definicje ustrojów społeczno-politycznych są zbliżone do ogólnej klasyfikacji systemów sterowania społecznego, wprowadzonej w [6].

## Prawa limitacyjne w gospodarce

Matematyka zajmuje się badaniem formalnych systemów dedukcyjnych. Przykładami takich systemów są geometria Euklidesa płaszczyzny [7] oraz aksjomatyka Peana arytmetyki liczb naturalnych [7]. Badanie takich systemów polega na tym, że pewne zdania danej teorii przyjmujemy bez dowodu i nazywamy aksjomatami danej teorii, a następnie staramy się przy pomocy reguł logiki wyprowadzić z aksjomatów inne zdania teorii, czyli tak zwane twierdzenia.

Pojawiają się przy tym pewne całkowicie naturalne żądania. Chcielibyśmy mianowicie, aby wybrany system aksjomatów był:

- niesprzeczny,
- zupełny.

System formalny niesprzeczny to taki system, w którym nie da się udowodnić jednocześnie pewnego zdania i jego zaprzeczenia. Natomiast system formalny zupełny to taki system, w którym możliwe jest przeprowadzenie dowodu dowolnego prawidłowo zapisanego zdania tego systemu lub jego zaprzeczenia. Zatem w systemie zupełnym każde prawdziwe zdanie jest możliwe do udowodnienia.

Matematyk niemiecki David Hilbert w 1899 roku podał taki układ 21 aksjomatów geometrii euklidesowej, przy którym ten system jest równocześnie niesprzeczny i zupełny.

Natomiast próby znalezienia niesprzecznego i zupełnego układu aksjomatów dla arytmetyki liczb naturalnych nie dawały pożądanego rezultatu. Jak się okazało, jest to niemożliwe, gdyż w 1931 roku matematyk austriacki Kurt Gödel udowodnił **twierdzenie o zupełności**:

*Niech  $S$  oznacza system formalny zawierający arytmetykę liczb naturalnych. Wtedy jeżeli  $S$  jest niespreczny, to  $S$  jest niezupełny.*

W szczególności wynika stąd przez kontrapozycję, że *jeśli system jest zupełny, to musi być spreczny*.

Twierdzenie o zupełności Gödla jest jednym z tak zwanych twierdzeń imitacyjnych matematyki, czyli twierdzeń wykazujących ograniczenia matematycznych systemów dedukcyjnych. Proste uzasadnienie twierdzenia Gödla można znaleźć w [8].

Ale jeśli istnieją ograniczenia w czysto teoretycznych systemach matematycznych, to zapewne wystąpią też pewne ograniczenia w systemach działających w realnym świecie.

Rozpatrzmy najpierw ustroj rynku. Skoro podstawowym celem działalności społeczeństwa jest produkcja dóbr ekonomicznych, to naturalne jest dążenie do zupełności podaży tych dóbr, czyli takiej podaży, która zaspokoi każdy rodzaj popytu konsumpcyjnego, włącznie z takim, który dopiero się pojawi wraz z pojawieniem się odpowiedniej podaży.

Zatem przez analogię do twierdzenia Gödla o zupełności można sformułować następujące prawo limitacyjne gospodarki rynkowej (gdyż gospodarka niewątpliwie korzysta z arytmetyki liczb naturalnych):

*w ustroju rynkowym przy zupełności podaży musi wystąpić sprzeczność podaży, czyli jej nadmiar – różne formy podaży współzawodniczą o ten sam popyt.*

Otrzymaliśmy w ten sposób prawo Kornaia o gospodarce nadmiaru dla ustroju rynkowego (u Kornaia – kapitalistycznego).

Opis wystąpienia nadmiaru podaży znajdujemy już w Biblii w opisie dwóch cudów rozmnożenia chleba: przy pierwszym „jedli wszyscy do sytości i zebrali jeszcze dwanaście pełnych koszów ułamków i ostatków z ryb” [9], a przy drugim „jedli do sytości, a pozostałych ułamków zebrali siedem koszów” [9].

Dodajmy jeszcze, że niezupełność produkcji idei w gospodarce rynkowej powoduje ich niedobór, a więc i kolejki po dobra ideowe typu nowego tomu przygód Harry’ego Pottera.

Teraz rozpatrzmy ustroj ideologiczny, w którym najważniejsza jest pewna ideologia. Jej rozpowszechnianie i utrwalanie ma na celu uzyskanie zupełności, czyli pozycji jedynie słusznej ideologii, która odpowiada na wszelkie możliwe pytania. Ta zupełność powoduje powstawanie sprzeczności wewnątrz panującej ideologii, co skutkuje powstawaniem frakcji w rządzącej partii (np. Natolińczycy i Puławianie w PZPR za czasów Gomułki).

Natomiast, ponieważ dobra ekonomiczne w ustroju ideologicznym są produkowane tylko w takim zakresie, jaki jest niezbędny do przeżycia członków społeczeństwa, to automatycznie produkcja dóbr ekonomicznych jest niespreczna, bo popyt na dane dobro ma być zaspokajany tylko w jeden sposób. Zatem znów przez analogię do twierdzenia Gödla o zupełności można sformułować następujące prawo limitacyjne gospodarki w ustroju ideologicznym:

*w ustroju ideologicznym przy niesprzeczności podaży musi wystąpić niezupełność podaży, czyli jej niedobór – różne formy popytu współzawodniczą o tę samą podaż.*

Otrzymaliśmy w ten sposób prawo Kornaia o gospodarce niedoboru dla ustroju ideologicznego (u Kornaia – socjalistycznego).

Zauważmy, że przy niezupełności produkcji dóbr ekonomicznych w ustroju ideologicznym (bo trudno tu mówić o gospodarce) muszą pojawić się kolejki po wszelkie towary i usługi.

## Prawa limitacyjne w systemach prawnych

Podobnie, jak dla systemów gospodarczych, przyjmujemy definicje dwóch typów systemów prawnych.

- Mówimy, że dane państwo jest **państwem prawa**, jeśli nikt, kto jest niewinny, nie zostaje skazany.
- Mówimy, że dane państwo jest **państwem sprawiedliwości**, jeśli nikt, kto jest winny, nie pozostaje nieskazany.

Jak widać, różnica między tymi systemami prawnymi polega na odmiennych celach, które im przyświecają: państwo sprawiedliwości przede wszystkim dba o zupełność karalności, podczas gdy państwo prawa dba o pewien rodzaj niesprzeczności, gdyż gdyby ludzie niewinni byli skazywani, wystąpiłaby sprzeczność.

Na podstawie analogii z twierdzeniem Gödla o niezupełności możemy sformułować następującą własność obu systemów:

- w państwie prawa są winni, którzy nie ponoszą kary (niezupełność);
- w państwie sprawiedliwości są niewinni, którzy zostają skazani (sprzeczność).

Idea sprawiedliwości jest zawsze wykorzystywana przez ustroje ideologiczne, natomiast wydaje się, że porządek prawny oparty na idei państwa prawa jest niezbędny dla właściwego działania ustroju rynkowego. Zauważmy jeszcze, że występujące często żądanie takiego systemu przepisów prawa, który by przewidywał wszystkie możliwe przestępstwa i wykroczenia, jest w rzeczywistości żądaniem zupełności prawa, która musi pociągać za sobą jego sprzeczność, czyli występowanie wzajemnie sprzecznych przepisów. Rozwiązaniem, które unika tego typu sprzeczności, jest prawo precedensowe, charakterystyczne dla Wielkiej Brytanii i jej byłych kolonii, w tym Stanów Zjednoczonych. Niestety, system precedensowy wymaga utrzymywania sporej liczby adwokatów, którzy zajmują się głównie wyszukiwaniem precedensów dla swoich klientów.

## Podsumowanie

Jak wynika z powyższych wywodów, społeczeństwa muszą wybierać między gospodarką niedoboru a gospodarką nadmiaru. Powszechne oburzenie wywołuje fakt marnowania żywności czy odzieży, podczas gdy znacznie gorsze jest marnowanie w kolejkach ludzkiego czasu, który mógłby być wykorzystany na przykład przy produkcji brakujących dóbr.

Niestety, trzecia droga, czyli taki ustrój, który nie dopuszcza marnowania ani dóbr ekonomicznych, ani ludzi, nie istnieje. Zazwyczaj trzecią drogę definiuje się jako taki ustrój, który harmonijnie łączy zalety obu opisanych powyżej ustrojów – rynkowego i ideologicznego. Jednak jak wynika z twierdzenia Gödla, nie ma szans na zupełność w obu tych dziedzinach. Zatem jedyna możliwa definicja trzeciej drogi jest następująca:

*trzecia droga jest to ustrój, który harmonijnie łączy wady ustrojów rynkowego i ideologicznego, nie posiadając żadnej z zalet tych ustrojów.*

Ponieważ, jak wspomnieliśmy, nie istnieje żadne państwo o ustroju idealnie rynkowym, więc występujące w praktyce „kapitalizmy realne” wykazują własności trzeciej drogi wraz ze wszystkimi jej wadami, ale winą za te wady należy raczej obarczyć domieszki socjalizmu, a nie wolny rynek.

## Literatura

1. J. Kornai, Economics of shortage, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1980.
2. J. Kornai, Niedobór w gospodarce, Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa, 1985.
3. J. Kornai, Dynamism, Rivalry and the Surplus Economy, Oxford University Press, Oxford, 2014.
4. J. Kornai, Dynamizm, rywalizacja i gospodarka nadmiaru, Fundacja Gospodarki i Administracji Publicznej, Kraków, 2014.

- 
5. Historia Wszechzwiązkowej Komunistycznej Partii (bolszewików). Krótki kurs, Książka i Wiedza, Warszawa, 1949.
  6. J. Kossecki, *Cybernetyka społeczna*, PWN, Warszawa, 1975.
  7. K. Cegiełka, J. Przyjemski, K. Szymański, *Matematyka. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum. Klasa IV i V*, wyd. 2., WSiP, Warszawa, 1990, s. 257, 270.
  8. J. Życiński, *Język i metoda*, Znak, Kraków 1983, s. 211-216.
  9. *Pismo Święte Nowego Testamentu*, Mk 6,42-43, Mk 8,8, Wydawnictwo Kurii Biskupiej, Lublin 1983.





# Porównanie siły ściskającej zniszczenia skorupki jaj kurzych uzyskanych z różnego rodzaju hodowli

## Comparison of destruction compressive force of chicken eggshells obtained from different types of chicken farms

Wiesław Juda<sup>a,\*</sup>

*<sup>a</sup>Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Tarnowie, ul. Mickiewicza 8, 33-100 Tarnów, Polska*

\*Corresponding author: w\_juda@pwszstar.edu.pl

---

### Streszczenie

Przeprowadzono badania porównawcze siły ściskającej potrzebnej do zniszczenia skorupki jaj kurzych z hodowli klatkowej i hodowli ekologicznej. Wyniki wskazują na brak istotnych różnic tego parametru pomiędzy badanymi rodzajami skorupki.

**Słowa kluczowe:** wytrzymałość na ściskanie, skorupki jaj

### Abstract

This research investigates differences in compression force needed for destruction of chicken eggshells obtained from cage farming and organic farming. There were no significant differences in this parameter of investigated eggshells.

**Key words:** compression strength, eggshells

---

### Wstęp

Oceny jakości jaj kurzych dokonywane są głównie na podstawie cech organoleptycznych, zgodnie z rozporządzeniem właściwego ministra [1]. Cechami tymi są m.in. zapach jaj, ich masa, widoczność ciał obcych przy prześwietlaniu jaja czy też kształt i uszkodzenia skorupy.

Z punktu widzenia inżyniera, nie wszystkie z tych pomiarów dają wyniki całkowicie ilościowe, otrzymujemy również dane jakościowe (np. zapach).

Oprócz wymiarów jaja, prostymi do zmierzenia w sposób ilościowy cechami są właściwości mechaniczne skorupki jaja. Opisując ilościowo właściwości mechaniczne skorupki, możemy posłużyć się zarówno próbą wytrzymałości na ściskanie jak i testem siły przebijania skorupki. Związek pomiędzy wartościami tych dwu pomiarów potwierdzono eksperymentalnie już w latach 70. XX wieku [2].

## Materiały i Metody

Do testów stosowano dostępne w wolnej sprzedaży na terenie Małopolski jaja klasy M, 10 z hodowli klatkowej i 9 z hodowli ekologicznej.

Pomiary rozpoczęto od określenia kształtów jaj. Zgodnie z literaturą poświęconą badaniu jaj kurzych [3], kształt jaj może być klasyfikowany według Indeksu Kształtu (woryginalie Shape Index, SI) oznaczonego IK, obliczanego według poniższego wzoru:

$$IK = \frac{W}{L} * 100 \quad (1)$$

gdzie W to szerokość, a L to wysokość jaja. Wartość tego indeksu służy klasyfikacji kształtu jaj – do 72 to kształt ostry, pomiędzy 72 a 76 to kształt zwykły, powyżej 76 to kształt okrągły.

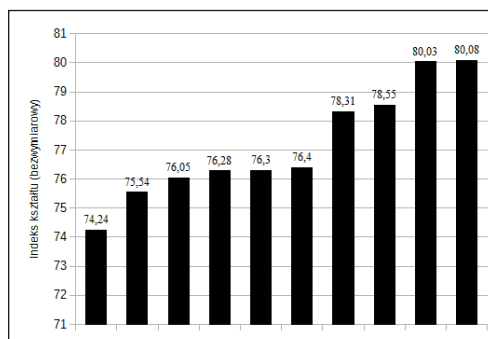
Wymiary skorupki jaj mierzono suwmiarką mechaniczną, z dokładnością do 0,01 mm. Jako wynik pomiaru przyjmowano średnią z 3 pomiarów.

Do przeprowadzenia badań wykorzystano uniwersalną maszynę wytrzymałościową AGS-X firmy Shimadzu. Jako próbki wykorzystano wydmuszki jajek, ustawione w pozycji pionowej za pomocą podpórki 3-częściowej z masy plastycznej. Zachowano jednolite ustawienie dłuższej osi jaj dla wszystkich testów.

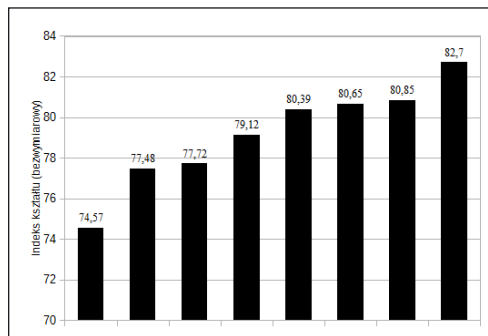
## Wyniki i Dyskusja

Badane wydmuszki jajek charakteryzowały się kształtem okrągłym (IK >76). Dla skorupki jaj z hodowli klatkowej, średnia wartość IK w próbce wynosiła 77,18, mediana tej wartości 76,35, a odchylenie standardowe IK w próbce miało wartość 1,96. W przypadku skorupki jaj z hodowli ekologicznej, średnia wartość IK wynosiła 76,37, mediana 79,12, wartość odchylenia standardowego zaś 3,32. Dla sprawdzenia hipotezy statystycznej o równości wartości oczekiwanych IK w popu-

lacjach generalnych obu rodzajów jaj, przeprowadzono obustronny test t-Studenta, przyjmując poziom ufności  $\alpha=0,95$ . Odpowiednia wartość krytyczna t wynosi 1,74. Otrzymano wartość obliczeniową  $t=0,34$ , brak więc podstaw do odrzucenia hipotezy o równej wartości oczekiwanej IK w obu populacjach.



Rysunek 1. Indeks kształtu dla jaj z hodowli klatkowej

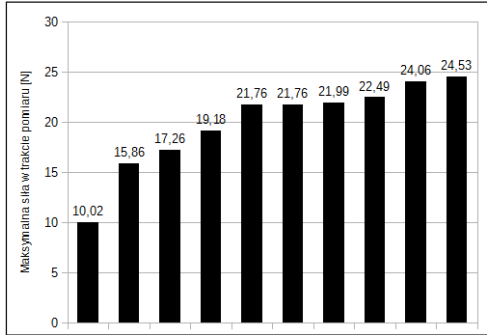


Rysunek 2. Indeks kształtu dla jaj z hodowli ekologicznej

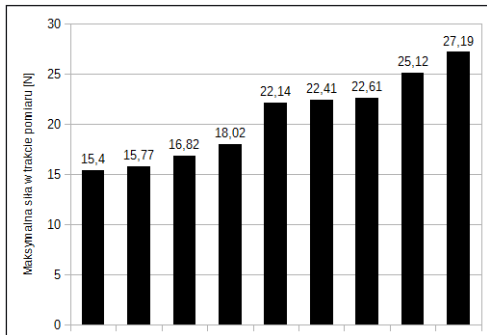
Siła potrzebna do zniszczenia skorupki jaj klatkowych wynosiła średnio 19,89 N. Mediana tej siły wyniosła 21,76 N, a odchylenie standardowe siły mierzonej na próbce 4,45 N. Dla jaj z hodowli ekologicznej, średnia siła potrzebna do zniszczenia skorupki wynosiła 20,61 N, mediana tej siły natomiast 22,14 N. Dla próbki skorupki jaj z hodowli ekologicznej, odchylenie standardowe wyniosło 4,26.

Dla zmierzonych sił zniszczenia, postawiono hipotezę statystyczną o równości wartości ocze-

kiwanych siły zniszczenia dla obu typów skorupki. Przyjęto poziom ufności  $\alpha=0,95$ , dla którego  $t$  krytyczne wynosi 1,74. Obliczona wartość kryterium  $t$  (testowanie obustronne) wynosi 0,72, nie ma więc podstaw do odrzucenia tej hipotezy.



**Rysunek 3.** Siła niszcząca dla skorupki jaj z hodowli klatkowej



**Rysunek 4.** Siła niszcząca dla skorupki jaj z hodowli ekologicznej

## Podsumowanie

Wyniki badań nie pozwalają na odrzucenie hipotez statystycznych o tożsamości wartości oczekiwanych Indeksu Kształtu i siły niszczącej skorupki w populacjach generalnych jaj z hodowli klatkowej i jaj z hodowli ekologicznej.

Nie oznacza to jednak stwierdzenia tożsamości badanych cech w populacjach generalnych jaj. Statystyka w wypadku takim, jak badany w niniejszej pracy wskazują na konieczność przebadania próby dużej (obie testowane populacje o liczebności co najmniej 100).

Dla prób dużych możliwe jest zastosowanie testu dla dwóch prób Kołmogorowa-Smirnowa, który pozwala jednoznacznie (dla danego poziomu ufności) określić czy w przebiegu 2 badanych realizacji zmiennej losowej występują statystycznie istotne różnice.

Można stwierdzić, że niniejsze badania nie wskazały istotnych statystycznie różnic w Indeksie Kształtu i wartościach siły niszczącej badanych skorupki jaj.

## Literatura

1. Rozporządzenie Ministra Rolnictwa i Rozwoju Wsi z dnia 29 grudnia 2003 r. w sprawie metod analiz jaj kurzych.
2. J.R. Hunt, P.W. Voisey, B.K. Thompson, *Can. J. Anim. Sci.*, 1977, **57**, 329-338.
3. S. Nedomova, L. Severa, J. Buchar, *Int. Agrophysics*, 2009, **23**, 249-256.



