Pewna uwaga o geometrii wykresu funkcji zliczającej liczby pierwsze
A certain note about the geometry of the first counting function graph

Edward Tutaj [a,*]

[a] *Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Tarnowie, ul. Adama Mickiewicza 8, 33-100 Tarnów, Poland*
*Corresponding author: edward.tutaj@im.uj.edu.pl

Streszczenie

Obwiednia wypukła podwykresu funkcji zliczającej liczby pierwsze x→π(x) jest zbiorem wypukłym ograniczonym od góry przez wykres pewnej kawałkami liniowej funkcji x→ϵ(x). Wierzchołki tego zbioru (węzły łamanej) tworzą nieskończony ciąg punktów $(e_k,\pi(e_k))_1$^∞. W niniejszej pracy przedstawione będą pewne obserwacje dotyczące ciągu (e_k)_1^∞ sugerowane przez zbiór 2500 jego początkowych wyrazów.

Słowa kluczowe: liczby pierwsze, funkcja zliczająca liczby pierwsze, hipoteza Riemanna

Abstract

The envelope convex subtraction of the first counting function x→π(x) is a convex set delimited from the top by a graph with a certain piece of the linear function x→ϵ(x). The vertices of this set (broken nodes) form an infinite series of points (e_k,π(e_k))_1^∞. In this paper we will present some observations on the sequence (e_k)_1^∞ suggested by the 2500 collection of its initial words.

Key words: prime numbers, function counting the prime numbers, Riemann's hypothesis

---

Wstęp

Liczby pierwsze to generatory półgrupy multiplikatywnej $\mathbb{N}^*$ (gdzie $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,\dots\}$). Nie można ich rozróżnić używając jedynie języka mnożenia. Można to natomiast zrobić wykorzystując naturalny porządek w $\mathbb{N}^*$. Funkcja $x \to \pi(x)$, zwana *funkcją* *zliczającą liczby pierwsze*, której definicję przypominamy niżej, jest przykładem odwołania się do tego typu porządkowych własności. Funkcja ta, znana od ponad dwu wieków, jest jednym z najintensywniej badanych obiektów matematycznych, i to przez najwybitniejszych uczonych. Mimo to nie znamy odpowiedzi na pewne ważne, dotyczące tej funkcji, pytania. Związane są one z tzw. *hipotezą Riemanna* o położeniu nie-trywialnych zer funkcji dzeta. To trudna problematyka, przekraczająca kompetencje autora niniejszego artykułu. W pracy tej zajmiemy się prostszym pojęciowo badaniem niektórych geometrycznych własności wykresu funkcji π. Są one z jednej strony łatwe do zdefiniowania i relatywnie łatwe do numerycznego badania, a z drugiej strony prowadzą do trudnych pytań.

Pewne geometryczne własności wykresu π były badane wiele lat temu (1979) między innymi przez C. Pommerance [4] i nie tak dawno temu (2006) przez H.L. Montgomery'ego i S.Wagona [2]. Przypomnimy teraz pewne definicje i oznaczenia.

Niech $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$ oznacza ciąg liczb pierwszych, t.j. $\mathbb{P} = \{2,3,5,7,11, \dots\}$. Zazwyczaj funkcję $\pi\colon [2, \infty) \longrightarrow [1, \infty)$ definiuje się wzorem:

$$\pi(x) = \sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq x} 1. \tag{1}$$

czyli $\pi(x)$ jest liczbą liczb pierwszych nie większych niż x.

Jednym z najważniejszych twierdzeń w teorii liczb, do którego będziemy się odwoływać, jest twierdzenie o rozmieszczeniu liczb pierwszych – w skrócie PNT – postulowanie niezależnie przez Gaussa i Legendre'a na przełomie XVIII i XIX wieku, a udowodnione dopiero pod koniec XIX wieku przez Hadamard'a i de la Vallée-Poussin'a:

Twierdzenie 1. *Zachodzi równość:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{ln\,(x)}} = 1.$$

W niektórych rozumowaniach i interpretacjach wygodniej będzie posługiwać się funkcją $\pi^*\colon [2, \infty) \longrightarrow [1, \infty)$ określoną przez warunki: $\pi^*(p_k) = \pi(p_k)$, π^* jest ciągła i afiniczna w prze–dzia–łach $[p_k, p_{k+1}]$.

Definicja liczb pierwszych ekstremalnych

Funkcja π^* jest rosnąca i ciągła, i gdy "patrzyć na nią z daleka", wydaje się być funkcją wklęsłą, chociaż taką nie jest. Dopuszcza ona jednak majoranty wklęsłe. W szczególności wiadomo, że istnieje stała $B > 1$ taka, że:

$$\pi(x) < B \cdot \frac{x}{ln\,(x)} \tag{2}$$

(wynika to oczywiście z PNT (Prime Number Theorem), ale udowodnione było wcześniej).

Rozważmy zbiór

$$\Omega = \{f: [2, \infty) \longrightarrow [1, \infty): f \geq \pi^*, f - \text{wklęsła}\}, \tag{3}$$

i zauważmy, chociaż to nie będzie odgrywało roli w naszych rozważaniach, że Ω jest podzbiorem stożka wektorowego wszystkich nieujemnych i wklęsłych funkcji na $[2, \infty)$. Kładziemy dla $x \in [2, \infty)$

$$\epsilon(x) = \inf\{f(x): f \in \Omega\}, \tag{4}$$

t.j. funkcja ϵ jest obwiednią dolną rodziny Ω. Innymi słowy funkcja ϵ jest najmniejszą funkcją wklęsłą, która jest większa lub równa niż π^* (równoważnie, niż π). Nietrudno zauważyć, że ϵ jest wklęsła i kawałkami afiniczna, a zatem zbiór

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in [2, \infty), 0 \leq y \leq \epsilon(x)\} \tag{5}$$

jest wypukły. Przypomnijmy, że gdy U jest zbiorem wypukłym i $b \in U$, to mówimy, że b jest *punktem ekstremalnym* zbioru U, wtedy i tylko wtedy, gdy b nie jest punktem wewnętrznym nietrywialnego odcinka leżącego w U.

Możemy teraz sformułować następującą definicję.

Definicja 2.

Liczbę pierwszą $p \in \mathbb{P}$ będziemy nazywali ekstremalną liczbą pierwszą, gdy punkt $(p, \pi(p))$ jest punktem ekstremalnym zbioru wypukłego Γ.

Własności zbioru liczb pierwszych ekstremalnych

Niech $\mathbb{E}$ oznacza zbiór wszystkich liczb pierwszych ekstremalnych. Czasami wygodniej jest mówić o ciągu liczb pierwszych ekstremalnych $\mathbb{E} = \{e_1, e_2, \dots,\}$, gdzie $e_1 < e_2 < e_3 \dots$, t.j. ciąg $(e_k)_1^\infty$ jest silnie rosnący.

Łatwo sprawdzić, że 2, 3 i 7 są liczbami ekstremalnymi, natomiast np. 11, 17 nie są liczbami ekstremalnymi. Zatem $\mathbb{E}$ i $\mathbb{N}^* \setminus \mathbb{E}$ są zbiorami niepustymi.

Nieco ciekawsza jest następująca propozycja.

Propozycja 3. *Zbiór $\mathbb{E}$ jest nieskończony.*

Proof.

Niech l_k oznacza linię prostą (funkcję afiniczną przechodzącą przez punkty $(e_{k-1}, \pi(e_{k-1}))$ i $(e_k, \pi(e_k))$. Z Definicji 1 wynika, że wykres funkcji ϵ leży poniżej linii l_k. Daje to prostą, indukcyjną metodę znalezienia następnej liczby ekstremalnej e_{k+1}, o ile dane są

$e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, e_k$ (w istocie wystarczy znać tylko e_{k-1} i e_k). W tym celu rozważamy ilorazy różnicowe postaci

$$I_k(p) = \frac{\pi(p) - \pi(e_k)}{p - e_k}, \tag{6}$$

dla $p \in \mathbb{P}, p > e_k$. Z uwagi poczynionej wyżej wynika, że dla każdego $p > e_k$ mamy:

$$0 < I_k(p) < \frac{\pi(e_k) - \pi(e_{k-1})}{e_k - e_{k-1}} = I_{k-1}(e_k). \tag{7}$$

Wykorzystując ogólnie znany fakt

$$\lim_{p\to\infty} \frac{\pi(p)}{p} = 0 \tag{8}$$

mamy $\lim_{p\to\infty} I_k\,(p) = 0$. Istnieje zatem skończony zbiór $\mathbb{P}_k \subset \mathbb{P}$ liczb pierwszych taki, że $p_o \in \mathbb{P}_k \Longrightarrow p_o > e_k$ i taki, że $I_k(p) \le I_k(p_o)$ dla $p > e_k$. Kładziemy $e_{k+1} = \max \mathbb{P}_k$ i to kończy dowód faktu, że $\mathbb{E}$ jest nieskończony.

Niech

$$\delta_k = \frac{\pi(e_{k+1}) - \pi(e_k)}{e_{k+1} - e_k}, \tag{9}$$

t.j. δ_n jest nachyleniem n-tego segmentu leżącego na wykresie funkcji ϵ. Ponieważ ϵ jest rosnąca i wklęsła, więc ciąg $(\delta_k)_1^\infty$ jest dodatni i ściśle malejący. Zauważmy, że ciąg $(\delta_k)_1^\infty$ może być identyfikowany z pochodną funkcji ϵ. Wobec monotoniczności istnieje granica $\delta = \lim_{k\to\infty} \delta_k \ge 0$ i musi być równa zero ($\delta = 0$), co wynika raz jeszcze z twierdzenia Legendre'a.

Liczba $\alpha_k = {\delta_k}^{-1}$ jest miarą gęstości liczb pierwszych w przedziale $[e_k, e_{k+1})$ i może być interpretowana jako średnia różnica między kolejnymi liczbami pierwszymi w tym przedziale. Z uwagi poczynionej wyżej wynika, że ciąg $(\alpha_k)_1^\infty$ jest silnie rosnący.

Naturalnym jest pytanie o moc zbioru $\mathbb{N} \setminus \mathbb{E}$. Mamy

Propozycja 4. *Zbiór* $\mathbb{N} \setminus \mathbb{E}$ *jest nieskończony.*

Proof.

Chociaż ta własność jest spodziewana, to jej uzasadnienie nie jest całkiem banalne, bo wiąże się z istnieniem małych różnic między liczbami pierwszymi. Zauważmy, że $card(\mathbb{N} \setminus \mathbb{E}) < \infty$ jest sprzeczne z hipotezą par bliźniaczych. Nie tak dawno udowodniono, że $\liminf\,(p_{n+1} - p_n) < 7 \cdot 10^7$ [4]. Wobec uwagi poczynionej wyżej zapewnia to nieskończoność zbioru $\mathbb{N} \setminus \mathbb{E}$.

Liczby pierwsze ekstremalne kolejno, czy też zbiór liczb pierwszych ekstremalnych w całości, mogą być definiowane na wiele, nieco się różniących sposobów. Omówimy niektóre. Jak wiadomo, funkcja jest wypukła (wklęsła) gdy w każdym podprzedziale przedziału określoności spełnia nierówność Jensena. Weźmy pod uwagę funkcję π^* i przedział $[a,b] \subset [2,\infty)$. Będziemy mówili, że $[a,b]$ jest *nietypowy*, gdy dla $\lambda \in (0,1)$ mamy

$$\pi^*(\lambda \cdot a + (1-\lambda) \cdot b) < \lambda\pi^*(a) + (1-\lambda)\pi^*(b). \tag{10}$$

Łatwo sprawdzić, że przedziały nietypowe istnieją i ich przestrzeń, z porządkiem danym przez inkluzję, ma elementy maksymalne. Końce takich maksymalnych przedziałów (dla π^*) to właśnie liczby pierwsze ekstremalne.

Można także zauważyć, że zbiór $\mathbb{E}$ jest w pewnym sensie minimalny, ze względu na własność (10). Istotnie, przypuśćmy, że $\mathbb{G} = (g_i)_1^\infty$ jest podciągiem ciągu $\mathbb{P}$ liczb pierwszych, takim, że $g_1 = 2$.

Niech

$$\delta_k(\mathbb{G}) = \frac{\pi(g_{k+1}) - \pi(g_k)}{g_{k+1} - g_k}. \tag{11}$$

Będziemy mówili, że $\mathbb{G}$ jest wklęsły, gdy $\delta_k(\mathbb{G})$ jest silnie malejący. Dla przykładu $\mathbb{E}$ jest wklęsły, podczas gdy $\mathbb{P}$ nie jest wklęsły. Podciąg ciągu wklęsłego jest wklęsły.

Ciąg $\mathbb{E}$ liczb pierwszych ekstremalnych ma następującą własność:

Propozycja 5. *Przypuśćmy, że ciąg* $(g_k)_1^\infty$ *jest wklęsły i ciąg* $\mathbb{E}$ *jest podciągiem ciągu* $\mathbb{G}$. *Wtedy* $\mathbb{E} = \mathbb{G}$.

Proof. Oczywiście $e_1 = g_1 = 2$. Ponieważ nie ma liczb pierwszych między 2 i 3, oraz $e_2 \in \mathbb{G}$, więc także $e_2 = g_2 = 3$. Przypuśćmy teraz, że $e_i = g_i$ dla $1 \leq i \leq k$. Chcemy pokazać, że $e_{k+1} = g_{k+1}$. Przypuśćmy przeciwnie, czyli że $e_{k+1} \neq g_{k+1}$ oraz że $g_{k+m} = e_{k+1}$, t.j. że

$$e_k = g_k < g_{k+1} < g_{k+2} < \ldots < g_{k+m} = e_{k+1}.$$

Teraz, przy oznaczeniach Propozycji 2 i definicji e_{k+1} mamy, dla $i < m$:

$$\delta_k(\mathbb{G}) = I_k(g_{k+1}) < \delta_k(\mathbb{E}) \tag{12}$$

Rozważmy funkcję $H: [e_k, e_{k+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$, taką że $H(g_{k+i}) = \pi(g_{k+i})$ i ponadto H jest afiniczna i ciągła w każdym przedziale $[g_{k+i}, g_{k+i+1}]$. Widzimy, że funkcja H jest ciągła i różniczkowalna poza zbiorem skończonym i że jej pochodna w przedziałach (g_{k+i}, g_{k+i+1}) jest stała i równa $\delta_{k+i}(\mathbb{G})$. Ponieważ $\mathbb{G}$ jest wypukły, to

$$\sup\{H'(x): x \in [e_k, e_{k+1}]\} = \delta_k(\mathbb{G}) < \delta_k(\mathbb{E}). \tag{13}$$

Funkcja H dopuszcza stosowanie do niej twierdzenia o wartości średniej, co prowadzi do

$$\sup\{H'(x): x \in [e_k, e_{k+1}]\} = \delta_k(\mathbb{G}) < \delta_k(\mathbb{E}). \tag{14}$$

a to jest niemożliwe.

Przedstawienie pewnych danych numerycznych

Posługując się programem *Mathematica* wyliczyliśmy 2500 początkowych liczb ekstremalnych. Przedstawiamy poniżej wybrane fragmenty tych danych.

Oto trzydzieści osiem początkowych liczb pierwszych ekstremalnych:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
e_n	2	3	7	19	47	73	113	199	283	467	661	887	1129	1327

n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
e_n	1627	2803	3947	4297	5881	6379	7043	9949	10343	13187	15823	18461	24137

n	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
e_n	33647	34763	37663	42863	43067	59753	57797	82619	96017	102679	129643

Lista e_k gdzie $k \leq 2500$ i $k \equiv 0(\mathrm{mod}\ 1\,00)$:

e_{100}	5253173
e_{200}	67596937
e_{300}	314451367
e_{400}	883127303
e_{500}	2122481761
e_{600}	4205505103
e_{700}	7274424463
e_{800}	12251434927
e_{900}	19505255383

e_{1000}	28636137347
e_{1100}	40001601779
e_{1200}	55036621907
e_{1300}	73753659461
e_{1400}	97381385771
e_{1500}	125232859691
e_{1600}	157169830847
e_{1700}	196062395777
e_{1800}	241861008029
e_{1900}	296478801431
e_{2000}	365234091199
e_{2100}	435006680401
e_{2200}	524320812671
e_{2300}	625382499043
e_{2300}	625382499043
e_{2400}	727995116377
e_{2500}	842057152381

Z analizy danych liczbowych dotyczących liczb ekstremalnych można wyciągać pewne przypuszczenia, które jednak nie wydają się być łatwymi do udowodnienia. Oto niektóre z nich.

1. Liczba ekstremalna $e_{2500} = 842057152381$ ma w ciągu liczb pierwszych numer

$$\pi(842057152381) = 31874435493, \tag{15}$$

z czego można wnosić, iż liczby ekstremalne są rzadko rozmieszczone w zbiorze liczb pierwszych (mniej niż jedna na milion w zakresie do 10^{12}). Można stąd wnosić, że następująca hipoteza jest prawdziwa:

Hipoteza 6. *Szereg*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e_k}$$

jest zbieżny.

Suma 10-ciu pierwszych wyrazów tego szeregu wynosi ok. 1,0830, zaś suma 2500 pierwszych wyrazów tego szeregu jest mniejsza niż 1,0903.

2. Można, w analogii do definicji funkcji π, zdefiniować funkcję π_ϵ następującą formułą:

$$\pi_\epsilon(x) = \sum_{p \in \mathbb{E}, p \leq x} 1. \tag{16}$$

Pytamy teraz, o możliwie mały wykładnik α, taki, że funkcja x^α rośnie szybciej niż $\pi_\epsilon(x)$. Dokładniej, stawiamy następujące pytanie. Czy

Hipoteza 7. *Istnieje*

$$\inf\{\alpha > 0: \pi_\epsilon(x) = o(x^\alpha)\}$$

i jest dodatnie.

3. Jest oczywistym, że $\pi(e_{k+1}) - \pi(e_k) \geq 1$, jednak równość nie jest wykluczona. Innymi słowy, kolejne liczby ekstremalne mogą być zarazem kolejnymi elementami w ciągu liczb pierwszych. Poza trywialnym przypadkiem $e_1 = 2$ i $e_2 = 3$ wśród naszych danych są jeszcze dwa takie przypadki dla $k = 116$ i $k = 976$. Nie widać fundamentalnych przyczyn, które by wykluczały istnienie innych osobliwości tego typu.

4. Najbardziej interesujące wydaje się przypuszczenie

Hipoteza 8. *Przy oznaczeniach jak wyżej*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = 1.$$

Zajmiemy się nim w następnej części pracy.

Definicja i własności soczewek

Z rozważań poprzedniej części wynika, że przedziały, których końcami są kolejne liczby ekstremalne, są elementami maksymalnymi ze względu na spełnianie nierówności Jensena. Będziemy je dalej nazywać soczewkami. Dokładniej

Definicja 9. *Dla liczby całkowitej dodatniej $k \in \mathbb{N}$ zbiór*

$$S_k = \{n \in \mathbb{N}: e_k \leq n < e_{k+1}\}$$

będziemy nazywać soczewką. Różnicę $e_{k+1} - e_k$ będziemy nazywać długością soczewki S_k i oznaczać symbolem $|S_k|$.

Czasami będziemy używać terminu soczewka w odniesieniu do części wykresu funkcji π^* dla $x \in [e_k, e_{k+1}]$, bądź do wykresu funkcji $[e_k, e_{k+1}] \ni x \longrightarrow \delta_k(x - e_k) + \pi(e_k) - \pi^*(x)$. Z rozważań zamieszczonych wyżej wynika, że długość soczewki S_k zmierza do nieskończoności, w miarę wzrostu k. Naszym zamierzeniem będzie bliższe przyjrzenie się szybkości tej zbieżności. Do tego celu wygodne będzie rozważanie funkcji $x \longrightarrow S(x)$ gdzie $S(x) = |S_k|$ dla $x \in [e_k, e_{k+1})$.

Weźmy pod uwagę następującą hipotezę:

Hipoteza 10. *Funkcja* $x \longrightarrow S(x)$ *spełnia warunek*

$$S(x) = o(x)$$

dla $x \to \infty$.

Zauważmy najpierw, że

Propozycja 11. *Hipotezy 8 i 10 są równoważne.*

Ta równoważność będzie udowodniona szczegółowo nieco dalej. Chwilowo zauważmy tylko, że mamy oczywistą, wynikającą wprost z definicji, równość

$$e_{k+1} = e_k + |S_k| = e_k + S(e_k),$$

skąd po podzieleniu obu stron przez e_k otrzymujemy

$$\frac{e_{k+1}}{e_k} = 1 + \frac{S(e_k)}{e_k},$$

co kończy dowód implikacji w jedną stronę.

Zauważmy dalej, że

Propozycja 12. *Jeżeli*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = 1$$

to

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1.$$

Proof.

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $k(n) \in \mathbb{N}$ takie, że

$$e_{k(n)} \leq p_n < p_{n+1} \leq e_{k(n)+1}.$$

Zatem

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \leq \frac{e_{k(n)+1}}{e_{k(n)}}$$

zaś ostatni ciąg zmierza zgodnie z założeniem do 1, jako podciąg ciągu zbieżnego do 1.

Warto w tym miejscu przypomnieć pewną uwagę Erdösa (także Selberga [1]), który miał powiedzieć *"z równości* $\lim_{n \to \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1$ *potrafię wywieść elementarny dowód PNT".* I tak istotnie zrobił. Jeżeli zatem hipoteza 8 lub 10 jest prawdziwa, to trudno się spodziewać, iż ma ona łatwy, elementarny dowód.

Logarytm całkowy

W tym rozdziale pokażemy, że hipoteza o wielkości soczewek w nieskończoności $S(x) = o(x)$ jest konsekwencją hipotezy Riemann'a. W tym celu musimy przypomnieć pewne definicje i pewne znane fakty. Będziemy rozważać dwie doskonale znane, występujące w hipotezie Riemann'a, funkcje. Pierwsza z nich, to *logarytm całkowy* $L: [2, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, zaś druga, to tzw. *funkcja błędu* (*error term*) $\varepsilon: [2, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, dane wzorami

$$L(x) = \int_2^x \frac{1}{ln\ t} dt \tag{17}$$

oraz

$$\varepsilon(x) = \sqrt{x} \cdot \ln\ x. \tag{18}$$

Wraz z tymi funkcjami będziemy rozważać funkcje

$$\varphi(x) = L(x) - \varepsilon(x) \tag{19}$$

oraz dla

$x \in (2, \infty)$ and $h \in \mathbb{R}$

$$l(x, h) = \varphi'(x) \cdot h + \varphi(x) \tag{20}$$

Oczywiście wszystkie te funkcje są analityczne co najmniej w przedziale $(2, +\infty)$. Będziemy potrzebować pochodnych rozważanych funkcji do czwartego rzędu włącznie. W występujących poniżej wzorach będziemy pisać y zamiast $ln(x)$ by nadać tym wzorom bardziej zwartą formę. Mamy więc:

$$L^{(1)}(x) = \frac{1}{ln\ x} = \frac{1}{y} \tag{21}$$

$$L^{(2)}(x) = \frac{-1}{x \cdot ln\ x} = \frac{-1}{x \cdot y^2} \tag{22}$$

$$L^{(3)}(x) = \frac{ln\ x + 2}{x^2 \cdot \overset{3}{ln} x} = \frac{y + 2}{x^2 \cdot y^3}, \tag{23}$$

$$L^{(4)}(x) = \frac{-(2 \cdot \overset{2}{ln} x + 6\, ln\ x + 6)}{x^3 \cdot \overset{4}{ln} x} = \frac{-(2 \cdot y^2 + 6y + 6)}{x^3 \cdot y^4} \tag{24}$$

Pochodne funkcji błędu, zapisane w podobny sposób, przedstawiają się tak:

$$\varepsilon(x) = \sqrt{x} \cdot \ln\ x = \sqrt{x} \cdot y, \tag{25}$$

$$\varepsilon^{(1)}(x) = \frac{ln\ x + 2}{2\sqrt{x}} = \frac{y + 2}{2\sqrt{x}}, \tag{26}$$

$$\varepsilon^{(2)}(x) = \frac{-\,ln\ x}{4x\sqrt{x}} = \frac{-y}{4x\sqrt{x}} \tag{27}$$

$$\varepsilon^{(3)} = \frac{3\,ln\ x - 2}{8x^2\sqrt{x}} = \frac{3y - 2}{8x^2\sqrt{x}}, \tag{28}$$

$$\varepsilon^{(4)}(x) = \frac{-15\,ln\ x + 16}{16x^3\sqrt{x}} = \frac{-15y + 16}{16x^3\sqrt{x}}. \tag{29}$$

Zauważmy, że drugie pochodne, tak funkcji L, jak i funkcji ε są ujemne, więc obie te funkcje są w swoich dziedzinach wklęsłe.

Druga pochodna funkcji φ ma postać

$$\varphi^{(2)}(x) = \frac{-4\sqrt{x} + \overset{3}{ln}\,x}{x\sqrt{x}\,\overset{2}{ln}\,x} = \frac{-4\sqrt{x} + y^3}{4x\sqrt{x}y^2}$$

zatem biorąc pod uwagę fakt, że

$$\lim_{x\to\infty}(\,-\,4\sqrt{x} + \overset{3}{\ln}\,x) = -\infty$$

możemy stwierdzić, że zachodzi następująca propozycja.

Propozycja 13. *Istnieje* $x_o \in (2, \infty)$ *takie, że funkcja* φ *jest wklęsła w przedziale* $[x_o, \infty)$.

Uwaga o wielomianach Taylora rozważnych funkcji

Ustalmy punkt $x \in (2, \infty)$. Niech $T_{x,L}^{(3)}$ oznacza wielomian Taylora rzędu trzy funkcji L o centrum w x. Zatem

$$T_{x,L}^{(3)}(h) = L(x) + L^{(1)}(x) \cdot h + \frac{1}{2} \cdot L^{(2)}(x) \cdot h^2 + \frac{1}{6} \cdot L^{(3)}(x) \cdot h^3. \tag{30}$$

Reszta $R_x^{(3)}(h) = L(x+h) - T_{x,L}^{(3)}(h)$, zapisana w formie Lagrange'a, dana jest wzorem:

$$R_x^{(3)}(h) = \frac{1}{24} L^{(4)}(\xi) \cdot h^4, \tag{31}$$

gdzie ξ jest punktem z przedziału $(x, x+h)$. Ponieważ $L^{(4)} < 0$ w całej swojej dziedzinie, to zachodzi poniższa nierówność.

Propozycja 14. *Dla każdego $x \in (2, \infty)$ i dla każdego $h \in (2-x, \infty)$ prawdziwa jest następująca nierówność:*

$$L(x+h) \leq T_{x,L}^{(3)}(h).$$

Niech $T_{x,\varepsilon}^{(3)}$ oznacza wielomian Taylora rzędu trzy funkcji ε o centrum w x, i.e.

$$T_{x,\varphi}^{(3)}(h) = \varepsilon(x) + \varepsilon^{(1)}(x) \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \varphi^{(2)}(x) \cdot h^2 + \frac{1}{6} \cdot L^{(3)}(x) \cdot h^3. \tag{32}$$

Używając podobnej argumentacji jak w przypadku funkcji L mamy:

Propozycja 15. *Dla każdego $x \in (2, \infty)$ i dla każdego $h \in (2-x, \infty)$ prawdziwa jest następująca nierówność:*

$$\varepsilon(x+h) \leq T_{x,\varepsilon}^{(3)}(h).$$

W konsekwencji mamy nierówność (dla $h \in (2-x, \infty)$):

$$L(x+h) + \varepsilon(x+h) < T_{x,L}^{(3)}(h) + T_{x,\varepsilon}^{(3)}(h). \tag{33}$$

Definicja pewnych dwóch funkcji

W tym rozdziale zdefiniujemy dwie funkcje $h_+ : (x_o, \infty) \ni x \to h_+(x) \in \mathbb{R}$ i $h_- : (x_o, \infty) \ni x \to h_-(x) \in \mathbb{R}$, gdzie x_o jest punktem zdefi−niowanym w Propozycji 13. W szczegółach omówimy definicję funkcji h_+. Definicja funkcji h_- będzie podobna.

Ustalmy punkt $x \in (x_o, \infty)$. Weźmy pod uwagę styczną $l(x, h)$ do wykresu funkcji φ w punkcie $(x, \varphi(x))$. Jej równanie ($h \in \mathbb{R}$) ma postać:

$$\begin{aligned} l(x,h) &= \varphi'(x)\cdot h + \varphi(x) \\ &= (L'(x)h - \varepsilon'(x))h + L(x) - \varepsilon(x). \end{aligned} \tag{34}$$

Półproste otrzymane, gdy we wzorze (34) ograniczymy się do $h \in [0,\infty)$ lub $h \in (-\infty,0]$ będziemy oznaczać symbolami $l_+(x,h)$ or $l_-(x,h)$ odpowiednio.

Dla $h = 0$ mamy nierówność:

$$l(x,0) = \varphi(x) = L(x) - \varepsilon(x) < L(x) + \varepsilon(x).$$

Oznacza to, że półprosta l_+ ßtartuje" z punktu wewnętrznego $(x, L(x) - \varepsilon(x))$ podwykresu $L + \varepsilon$, który jest zbiorem wypukłym. Ponieważ

$$\frac{d}{dh}L(x+h) = \frac{1}{ln\,(x+h)}$$

i

$$\frac{d}{dh}\varepsilon(x+h) = \frac{ln\,(x+h)+2}{2\sqrt{x+h}}$$

zatem

$$\lim_{h\to\infty}\frac{d}{dh}(L(x+h)+\varepsilon(x+h)) = 0.$$

Z drugiej strony

$$\frac{d}{dh}l(x+h) = \varphi'(x) > 0,$$

z czego wynika, że półprosta $l_+(x,h)$ musi przeciąć wykres ściśle wklęsłej funkcji $L(x+h)+\varepsilon(x+h)$ w dokładnie jednym punkcie. Oznacza to, że prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Propozycja 16. *Dla każdego $x \in (x_o,\infty)$ istnieje dokładnie jedna liczba dodatnia $h_+(x)$ taka, że*

$$L(x+h_+(x)) + \varepsilon(x+h_+(x)) = \varphi'(x)\cdot h_+(x) + \varphi(x).$$

Mówiąc nieco inaczej, dla każdego $x \in (x_o,\infty)$ równanie (o niewiadomej h)

$$L(x+h) + \varepsilon(x+h) = \varphi'(x)\cdot h + \varphi(x) \tag{35}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie dodatnie, które oznaczamy symbolem $h_+(x)$.

Jeżeli zastąpimy półprostą $l_+(x,h)$, przez półprostą $l_-(x,h)$, to stosując analogiczne rozumowanie, otrzymujemy następujący fakt.

Propozycja 17. *Dla każdego $x \in (x_o, \infty)$ istnieje dokładnie jedna liczba ujemna $h_-(x)$ taka, że*

$$L(x + h_-(x)) + \varepsilon(x + h_-(x)) = \varphi'(x) \cdot h_-(x) + \varphi(x).$$

Inaczej mówiąc równanie (35) ma dokładnie jedno rozwiązanie ujemne, które oznaczamy symbolem $h_-(x)$.

Pewne równanie pomocnicze

Rząd wielkości długości soczewek w nieskończoności związany będzie z szybkością zmierzania do nieskończoności funkcji $x \to h_+(x)$ i $x \to h_-(x)$ (w istocie różnicy $h_+(x) - h_-(x)$). Ponieważ równanie (35) jest trudne do rozwiązania, to, dla osiągnięcia zamierzonego oszacowania, będziemy rozważać pewne równanie pomocnicze:

$$T_{x,L}^{(3)}(h) + T_{x,\varepsilon}^{(3)}(h) = \varphi'(x) \cdot h + \varphi(x), \tag{36}$$

które może być zapisane w postaci

$$\begin{aligned} W_x(h) := \frac{1}{6}(L^{(3)}(x) + \varepsilon^{(3)}(x)) \cdot h^3 + \frac{1}{2}(L^{(2)}(x) + \varepsilon^{(2)}(x)) \cdot h^2 \\ + 2\varepsilon^{(1)}(x) \cdot h + 2\varepsilon(x) = 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Jak widzimy, równanie (37) jest równaniem algebraicznym trzeciego stopnia. Ma ono więc co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Pokażemy, że równanie to ma zawsze trzy pierwiastki. Interesować nas będzie nie tylko istnienie pierwiastków równania (37), ale także ich znaki. Zauważmy, że wobec $W_x(0) = 2\varepsilon(x) > 0$, liczba $h = 0$ nie może być pierwiastkiem rozważanego równania. Zauważmy też, że równanie (37) nie jest pojedynczym równaniem algebraicznym, ale jednoparametrową rodziną równań algebraicznych z parametrem $x \in (x_o, \infty)$.

Udowodnimy następujący lemat.

Lemat 18. *i). Istnieje $x_+ \in (x_o, \infty)$, taki,że dla $x > x_+$ równanie $W_x(h) = 0$ ma pierwiastek dodatni.*

ii). Istnieje $x_- \in (x_o, \infty)$ taki, że dla każdego $x > x_-$ równanie $W_x(h) = 0$ ma pierwiastek ujemny.

Dowód lematu przeprowadzimy później wraz z dowodem Propozycji 23. Załóżmy więc, że Lemat 18 jest prawdziwy. Pozwoli to nam na zdefiniowanie dwu nowych funkcji h_+^* and h_-^*. Opiszemy w szczegółach definicję funkcji h_+^*.

Definicja 19. *Niech* $x \in (x_+, \infty)$. *Wówczas zbiór dodatnich pierwiastków równania (35) jest niepusty i kładziemy*

$$h_+^*(x) = \min\{h > 0 : W_x(h) = 0\}.$$

Związek między funkcjami h_+ i h_+^* jest następujący:

Propozycja 20. *Jeżeli Lemat 18 jest prawdziwy, to dla* $x \in (x_+, \infty)$ *zachodzi nierówność* $h_+(x) < h_+^*(x)$.

Proof. Ustalmy $x \in (x_+, \infty)$. W przedziale $[x, x + h_+(x)]$, i.e. dla $h \in [0, h_+(x)]$ linia $l(x, h)$ leży poniżej wykresu funkcji $L + \varepsilon$. Wynika to wprost z definicji funkcji $h_+(x)$. Zatem w tym przedziale linia $l(x, h)$ nie może przeciąć wykresu funkcji $T_{x,\varepsilon}^{(3)} + T_{x,L}^{(3)}$ wobec nierówności (33). Zatem równanie $W_x(h) = 0$ nie ma pierwiastków w przedziale $h \in [0, h_+(x)]$. Ale to oznacza, że $h_+(x) < h_+^*(x)$, co kończy dowód Propozycji 20.

Zakładając ponownie prawdziwość Lematu 18 możemy postawić następującą definicję.

Definicja 21. *Niech* $x \in (x_-, \infty)$. *Wówczas zbiór ujemnych pierwiastków równania (37) jest niepusty. Kładziemy:*

$$h_-^*(x) = \max\{h < 0 : W_x(h) = 0\}.$$

Zwrot "zbiór pierwiatków" jest w rozważanym przypadku pewnym nadużyciem, bo, jak łatwo sprawdzić, równanie (37) ma jeden pierwiastek ujemny i dwa dodatnie.

Związek między funkcjami h_- i h_-^* jest następujący:

Propozycja 22.

Jeżeli Lemat 18 jest prawdziwy, wówczas dla $x \in (x_-, \infty)$ *zachodzi nierówność:* $h_-(x) > h_-^*(x)$.

Dowód Propozycji 22 jest analogiczny do dowodu Propozycji 20.

Dowód głównego lematu

Teraz udowodnimy Lemat 18. Równanie (37) którym się interesujemy, może być zapisane w formie:

$$A_3(x) \cdot h^3 + A_2(x) \cdot h^2 + A_1(x) \cdot h + A_o(x) = 0 \tag{38}$$

gdzie, używając wzorów 21-28, mamy:

$$A_3(x) = \frac{1}{6}(L^{(3)}(x) + \varepsilon^{(3)}(x)) \\ = \frac{1}{48} \cdot \frac{8\sqrt{x}(y+2) + y^3(3y-2)}{x^2\sqrt{x}y^3}, \tag{39}$$

$$A_2(x) = \frac{1}{2}(L^{(2)}(x) + \varepsilon^{(2)}(x)) = \frac{-1}{8} \cdot \frac{4\sqrt{x} + y^3}{x\sqrt{x}y^2}. \tag{40}$$

$$A_1(x) = \frac{y+2}{\sqrt{x}}, \tag{41}$$

$$A_o(x) = 2\sqrt{x}y. \tag{42}$$

Teraz, biorąc pod uwagę fakt, że dla dostatecznie dużych x $A_3(x) > 0$, dzielimy równanie (38) przez $A_3(x)$ i sprowadzamy równanie do postaci:

$$h^3 + B_2(x) \cdot h^2 + B_1(x) \cdot h + B_o(x) = 0 \tag{43}$$

gdzie

$$B_2(x) = \frac{A_2(x)}{A_3(x)} = -6x\frac{4\sqrt{x}y + y^4}{8\sqrt{x}y + 16\sqrt{x} + 3y^4 - 2y^3}, \tag{44}$$

$$B_1(x) = \frac{A_1(x)}{A_3(x)} = 48x^2\frac{y^4 + 2y^3}{8\sqrt{x}y + 16\sqrt{x} + 3y^4 - 2y^3}, \tag{45}$$

$$B_o(x) = \frac{A_o(x)}{A_3(x)} = 96x^3\frac{y^4}{8\sqrt{x}y + 16\sqrt{x} + 3y^4 - 2y^3}. \tag{46}$$

$$h^3 + B_2(x) \cdot h^2 + B_1(x) \cdot h + B_o(x) = 0 \tag{47}$$

Dla dalszej analizy równania (43) wygodnym będzie posłużenie się symbolami Landau'a. Przypomnijmy, że dla funkcji g określonej w otoczeniu $+\infty$ będziemy pisać $g = o(1)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Używając tej konwencji, możemy napisać:

$$B_2(x) = -6x\frac{\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)}, \tag{48}$$

$$B_1(x) = 48x^2 \frac{o(1)}{1+o(1)}, \tag{49}$$

$$B_o(x) = 96x^3 \frac{o(1)}{1+o(1)}. \tag{50}$$

Pozwala to na zapisanie równania (43) w postaci:

$$h^3 - 6x\frac{\frac{1}{2}+o(1)}{1+o(1)}h^2 + 48x^2\frac{o(1)}{1+o(1)}h + 96x^3\frac{o(1)}{1+o(1)} = 0. \tag{51}$$

Teraz podstawiamy $h = \theta x$, co prowadzi do postaci:

$$\begin{gathered}\theta^3x^3 - 6x\frac{\frac{1}{2}+o(1)}{1+o(1)}\theta^2x^2 + 48x^2\frac{o(1)}{1+o(1)}\theta x \\ + 96x^3\frac{o(1)}{1+o(1)} = 0.\end{gathered} \tag{52}$$

Ponieważ zajmujemy się tylko sytuacją, kiedy $x > 0$, to możemy podzielić ostatnie równanie przez x^3, otrzymując następujące równanie (z niewiadomą θ):

$$\theta^3 - 6\frac{\frac{1}{2}+o(1)}{1+o(1)}\theta^2 + 48\frac{o(1)}{1+o(1)}\theta + 96\frac{o(1)}{1+o(1)} = 0. \tag{53}$$

Na koniec, biorąc pod uwagę równość:

$$\frac{\frac{1}{2}+o(1)}{1+o(1)} = \frac{1}{2} + o(1)$$

możemy zapisać równanie (52) w postaci:

$$\theta^3 - 3\theta^2 + v_2(x)\theta^2 + v_1(x)\theta + v_o(x) = 0, \tag{54}$$

gdzie $v_1(x)$, $v_2(x)$, $v_o(x)$ są trzema dodatnimi funkcjami określonymi w otoczeniu $+\infty$ i zmierzającymi 0 gdy x zmierza $+\infty$. Jeżeli dla ustalonego x' znajdziemy liczbę θ' będącą pierwiastkiem równania (54),to wówczas liczba $h' = \theta' \cdot x'$ jest pierwiastkiem równania (43). Wystarczy zatem badać równanie (54). Udowodnimy więcej.

Propozycja 23. Dla każdego $\alpha > 0$ istnieje punkt x_2 taki, że dla każdego $x > x_2$ równanie (53) ma w przedziale $[-\alpha, \alpha]$ dokładnie dwa pierwiastki θ_- i θ_+, i ponadto $\theta_- < 0 < \theta_+$.

Proof. Istotnie, Propozycja 23 jest silniejsza niż Lemat 18, w którym postulujemy jedynie istnienie pierwiastków ujemnego i dodatniego. W Propozycji 23 dowodzimy nie tylko, że takie pierwiastki istnieją, ale że możemy je znaleźć w dowolnie małym przedziale o środku w 0. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że $\alpha \leq 1$. Ustalmy więc liczbę $1 \geq \alpha > 0$ i wybierzmy x_2 na tyle duży, że dla $x > x_2$ mamy:

$$v_2(x) \cdot \alpha^2 + v_1(x) \cdot \alpha + v_o(x) < 2\alpha^2 \tag{55}$$

and

$$v_2(x) \cdot \alpha^2 - v_1(x) \cdot \alpha + v_o(x) < 2\alpha^2, \tag{56}$$

Taki punkt x_2 istnieje, gdyż wszystkie trzy funkcje v_2, v_1, v_o są $o(1)$ gdy x zmierza do $+\infty$. Ustalmy $x > x_2$. Przepisujemy równanie w postaci: $f(\theta) = g(\theta)$, gdzie

$$f(\theta) = \theta^3 + v_2(x) \cdot \theta^2 + v_1(x) \cdot \theta + v_o(x), \tag{57}$$

i

$$g(\theta) = 3 \cdot \theta^2. \tag{58}$$

Połóżmy $h(\theta) = f(\theta) - g(\theta)$ i weźmy pod uwagę przedział $[0, \alpha]$. Mamy: $h(0) = f(0) - g(0) = v_o(x) > 0$ i, (ponieważ $\alpha < 1$ oraz mamy nierówność (52)) otrzymujemy:

$$h(\alpha) = f(\alpha) - g(\alpha) = \alpha^3 + v_2(x) \cdot \alpha^2 + v_1(x) \cdot \alpha + v_o(x) < \alpha^2 + 2\alpha^2 - 3\alpha^2 = 0.$$

Zatem równanie ma pierwiastek $\theta_+ \in (0, \alpha)$.

Rozważmy teraz przedział $[-\alpha, 0]$. Dla $\theta = 0$ mamy, jak wyżej $h(0) = v_o(x) > 0$. Dla $\theta = -\alpha$ mamy (wobec $-\alpha^3 < 0$ i nierówności

$$h(-\alpha) = f(-\alpha) - g(-\alpha) = -\alpha^3 + v_2(x) \cdot \alpha^2 - v_1(x) \cdot \alpha + v_o(x) - 3\alpha^2$$
$$< v_2(x) \cdot \alpha^2 - v_1(x) \cdot \alpha + v_o(x) - 3\alpha^2 < 2\alpha^2 - 3\alpha^2 < 0.$$

Powołując się raz jeszcze na argument ciągłościowy wnosimy o istnieniu pierwiastka θ_- równania w przedziale $(-\alpha, 0)$. Zauważmy, że $\theta_- \cdot x = h_-^*(x)$ oraz $\theta_+ \cdot x = h_+^*(x)$. To kończy dowód Propozycji 23, a zatem i Lematu 18.

Rząd wzrostu soczewek

W rozważaniach poprzednich rozdziałów, pojawiły się cztery funkcje: h_-, h_+, h_-^* oraz h_+^*, które są zdefiniowane w pewnym przedziale postaci (M, ∞) i które spełniają następujące nierówności (dla każdego $x \in (M, \infty)$)

$$h_-^*(x) < h_-(x) < 0 < h_+(x) < h_+^*(x). \tag{59}$$

Naszym celem jest określenie rzędu wielkości w $+\infty$ różnicy $H(x) = h_+(x) - h_-(x)$. Udowodnimy następujące:

Propozycja 24. *Funkcja H spełnia związek:*

$$H(x) = o(x),$$

gdy x zmierza do $+\infty$.

Proof. Wynika to bezpośrednio z własności sformułowanej w Propozycji 23. Istotnie wystarczy sprawdzić oddzielnie, że $h_+(x) = o(x)$ oraz $h_-(x) = o(x)$. Dla udowodnienie pierwszej z tych relacji ustalmy dowolną liczbę dodatnią $\epsilon > 0$. Z Propozycji 23 (kładąc $\alpha = \epsilon$) wynika, że istnieje $M_1 > M$, takie, że $x > M_1$ implikuje istnienie liczby $\theta < \epsilon$ (θ zależnej od x) takiej, że $h_+^*(x) = \theta \cdot x$. Ale to oznacza, że

$$\frac{h_+^*(x)}{x} < \epsilon$$

dla $x > M_1$. Dowód dla h_-^* jest analogiczny.

Teraz już możemy udowodnić twierdzenie o rzędzie wielkości soczewek S_k w nieskończoności, w oparciu o Propozycję 24. Najpierw jednak udowodnimy pewien lemat o ciągach zbieżnych do $+\infty$.

Lemat 25. *Przypuśćmy, że dane są cztery ciągi* $(x_k^-)_1^\infty$,$(x_k^+)_1^\infty$,$(z_k)_1^\infty$, *oraz* $(e_k)_1^\infty$ *takie, że:*

$$0 < x_k^- \leq e_k < e_{k+1} \leq x_k^+, \tag{60}$$

$$x_k^- \leq z_k \leq x_k^+, \tag{61}$$

$$\lim_{k\to\infty} e_k = +\infty, \tag{62}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k^+ - x_k^-}{z_k} = 0. \tag{63}$$

Wówczas

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1} - e_k}{e_k} = 0.$$

Proof.

Z własności (60) i (62) wnosimy, że:

$$\lim_{k\to\infty} x_k^+ = +\infty.$$

Dalej stwierdzamy, że również

$$\lim_{k\to\infty} x_k^- = +\infty.$$

Istotnie, przypuśćmy, że istnieje nieskończony zbiór $\mathbb{L} \subset \mathbb{N}$ i stała $K > 0$ takie,że $0 \le x_n^- \le K$ dla $n \in \mathbb{L}$. Zatem dla $n \in \mathbb{L}$ mamy:

$$0 \le \frac{x_n^+ - K}{z_n} \le \frac{x_n^+ - x_n^-}{z_n}$$

Stąd wobec (??0)

$$\frac{x_n^+ - K}{z_n} \to 0, n \in \mathbb{L}.$$

Stąd z kolei wynika, że $\lim_{n\in\mathbb{L}} z_n = +\infty$. W konsekwencji

$$\lim_{n\in\mathbb{L}} \frac{x_n^+}{z_n} = 0,$$

a to zaś oznacza, że istnieje $n \in \mathbb{L}$ takie, że $x_n^+ < z_n$, co jest niemożliwe, wobec (61).

Z nierówności

$$\frac{x_k^+ - x_k^-}{x_k^+} \le \frac{x_k^+ - x_k^-}{z_k}$$

wnosimy, że

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_k^-}{x_k^+} = 1$$

a to pozwala na stwierdzenie, że

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_k^+ - x_k^-}{x_k^-} = 0.$$

Ale

$$\frac{x_k^+ - x_k^-}{e_k} \le \frac{x_k^+ - x_k^-}{x_k^-}$$

więc

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k^+ - x_k^-}{e_k} = 0.$$

Ponieważ

$$\frac{e_{k+1} - e_k}{e_k} \le \frac{x_k^+ - x_k^-}{e_k}$$

to

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1} - e_k}{e_k} = 0,$$

co kończy dowód Lematu 25.

Lemat 26. *Wykres funkcji π^* leży między wykresami funkcji $L - \varepsilon$ oraz $L + \varepsilon$.*

Proof.

To dość oczywista własność, ale uzasadnienie tej oczywistości byłoby dłuższe niż formalny dowód. Załóżmy więc własność przeciwną. Oznacza to, że istnieją dwie kolejne liczby pierwsze p_n and p_{n+1}, takie, że punkty $A = (p_n, n)$ i $B = (p_{n+1}, n+1)$ leżą między $L - \varepsilon$ i $L + \varepsilon$ natomiast odcinek $[A, B]$ przecina wykres $L - \varepsilon$ lub $L + \varepsilon$. Ponieważ podwykres $L + \varepsilon$ jest wypukły, zatem $[A, B]$ przecina jedynie wykres funkcji $L - \varepsilon$. To z kolei oznacza, że istnieje $x \in (p_n, p_{n+1})$ taki, że punkt $X = (x, n)$ leży pod wykresem $L - \varepsilon$, bo π jest niewiększa od π^*. Ale $X = (x, \pi(x))$, zatem z definicji funkcji ε wynika, że X leży między wykresami $L - \varepsilon$ i $L + \varepsilon$. To kończy dowód Lematu 26.

Lemat 27. *Niech S_k będzie soczewką zdefiniowaną przez ekstremalne liczby pierwsze e_k i e_{k+1}. Wówczas odcinek łączący punkty $U = (e_k, \pi(e_k))$ i $V = (e_{k+1}, \pi(e_{k+1}))$ nie może przecinać wykresu funkcji $L - \varepsilon$ w dwu różnych punktach.*

Proof. Teza wynika z Lematu 26 gdyż zgodnie z definicją punktów ekstremalnych, cały wykres π^* w przedziale $[e_k, e_{k+1}]$ leży poniżej odcinka łączącego U i V, a jak pokazaliśmy wyżej, wykres π^* leży nad wykresem $L - \varepsilon$.

Główne twierdzenie niniejszego rozdziału to:

Twierdzenie 28. *Przy oznaczeniach jak wyżej, Hipoteza Riemann'a implikuje równość:*

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = 1.$$

Proof. Niech U i V będą jak w Lemacie 27. Niech $l(U, V)$ będzie linią prostą łączącą U i V. Przesuńmy tę prostą równolegle w kierunku pionowym do pozycji l^*, gdzie linia prosta l^* jest równoległa do $l(U, V)$ i styczna do wykresu funkcji $L - \varepsilon$. Linia ta - l^* - przecina wykres $L + \varepsilon$ w punktach U^* i V^*, których pierwszymi współrzędnymi są liczby x_k^- oraz x_k^+ odpowiednio, zaś pierwszą współrzędną punktu styczności jest z_k. Łatwo sprawdzić, że ciągi $(x_k^-)_1^\infty$,$(x_k^+)_1^\infty$,$(z_k)_1^\infty$, i $(e_k)_1^\infty$ spełniają założenia Lematu 25. To kończy dowód twierdzenia.

Mamy też równoważne sformułowanie Twierdzenia 28.

Wniosek 29. *Funkcja długości soczewek $x \to S(x)$ spełnia warunek $S(x) = o(x)$.*

Uwagi końcowe

Naturalnym jest pytanie, czy twierdzenie o zachowaniu się długości soczewek w nieskończoności można udowodnić bez odwołania się do hipotezy Riemann'a i czy można dokładniej określić kształt funkcji $S(x)$. Podany w tej pracy dowód twierdzenia $S(x) = o(x)$ oparty jest na rozwinięciu Taylora. Możliwym jest skorzystanie z twierdzenia o funkcjach uwikłanych w wersji z trywialną pierwszą różniczką i nietrywialną drugą, ale bez istotnego wpływu na długość dowodu. Jak wspomniałem, "łatwy" dowód twierdzenia $S(x) = o(x)$, bez zakładania Hipotezy Riemanna, jest mało prawdopodobny wobec wspomnianej wyżej deklaracji Erdösa. Szczegóły opisane są w świetnym artykule D. Goldfelda [1].

W odniesieniu do "kształtu" funkcji $S(x)$, są pewne przesłanki sugerujące relację $S(x) = O(\sqrt{x} \cdot \ln^3(x))$, oczywiście przy założeniu hipotezy Riemanna. Dane eksperymentalne, wprawdzie szczupłe, wspierają to przypuszczenie. Na koniec dodajmy, że ciąg liczb pierwszych ekstremalnych "mieszka" od trzech lat w *The On-Line Encyklopedia of Integer Sequences* pod numerem A246033 i - jak dotąd - nikt nie zakwestionował legalności jego tam pobytu.

Tarnowski akcent

Historia PNT i Hipotezy Riemanna trwa już ponad dwa wieki. Wśród wielu nazwisk znakomitych matematyków, którzy pisali i piszą tę pasjonującą historię, są dwa związane z Krakowem i Tarnowem. Krakowski akcent przedstawia się następująco. W drugiej połowie XIX wieku profesorem matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego był Franciszek Mertens. Jest on autorem hipotezy, zwaną *hipotezą Mertensa*, którą formułuje się tak. Dla liczby naturalnej k definiujemy (Möbius) liczbę $\mu(k)$, która przyjmuje wartość zero dla tych liczb naturalnych, które są podzielne przez kwadrat liczby pierwszej. Dla liczb bezkwadratowych $\mu(k)$ jest równe $+1$ lub -1 w zależności od tego, czy liczba czynników pierwszych w rozkładzie k jest parzysta, czy nieparzysta. Funkcja Mertensa dana jest wzorem

$$M(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}, k \leq x} \mu(k).$$

Hipoteza Mertensa mówi, że dla każdego x zachodzi oszacowanie $|M(x)| < \sqrt{x}$ i stosunkowo łatwo dowodzi się, że hipoteza Mertensa implikuje hipotezę Riemanna. Zrozumiałym jest, że hipoteza Mertensa budziła wielkie zainteresowanie. Sam Mertens sprawdził "ręcznie" jej prawdziwość dla $x < 10^4$. Przez dziesięciolecia znacząco powiększono wykładnik 4 i nie znaleziono do dziś numerycznego kontrprzykładu. Jednak hipoteza Mertensa okazała się nieprawdziwa. Udowodnili to w 1985 roku dwaj matematycy: Holender H.J.J. te Riele i Amerykanin A.M.Odlyzko. Dokładniej Andrew Odlyzko, czyli Andrzej Odłyżko. Urodzony w Tarnowie w 1949 roku. I to jest ten „tarnowski akcent”.

Literatura

1. D. Goldfeld, The Elementary Proof of the Prime Number Theorem: An Historical Perspective, https://people.math.osu.edu/nevai.1/AT/ERDOS/ErdosSelbergDispute.pdf
2. H. L. Montgomery, S. Wagon, The Mathematical Intelligencer, 2006, **28:3**, 6-9.
3. A. M. Odlyzko, H. J. J. te Riele, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1985, **357**, 138-160.
4. C. Pommerance, *Mathematics of Computations*, 1979, **33**, 399-408.
5. Y. Zhang, *Annals of Mathematics*, 2014, **179**, 1121-1174.